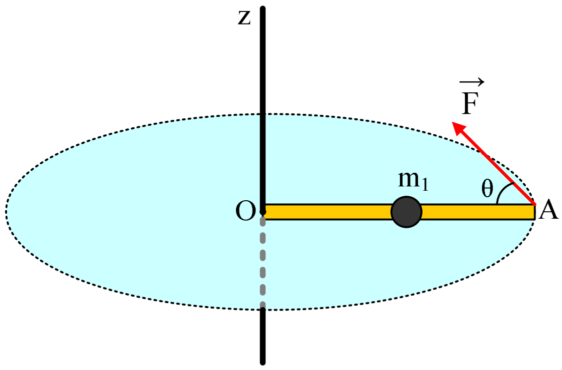
Στροφορμή και μεταβολή στροφορμής.

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος, έχει μήκος ℓ=2m και μάζα M=3kg και μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσον της ράβδου έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m_1=4kg. Το στερεό Π, που δημιουργήσαμε με τον τρόπο αυτό ηρεμεί.



Για t=0 ασκείται στο άκρο Α της ράβδου μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη F=5N, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ=30° με τη ράβδο, όπως στο σχήμα, μέχρι τη χρονική στιγμή t=2s, όπου η δύναμη καταργείται.

i) Η στροφορμή που αποκτά το στερεό Π ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής z.

ii) Σε μια στιγμή t>2s, το σώμα Σ ξεκολλά από τη θέση του και γλιστρώντας κατά μήκος της ράβδου, καρφώνεται σε ένα μικρό καρφί που υπάρχει στο άκρο Α της ράβδου.

Να βρεθούν για την παραπάνω μετακίνηση:

α) Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το άκρο Ο.

β) Η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής της ράβδου.

γ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα z $I=1/3\, M\ell^2$.

Απάντηση:

i) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού ως προς (κατά τον) άξονα z δίνεται από τη σχέση:

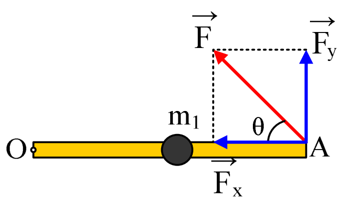
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \ (1)$$

όπου Στ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα. Αλλά τα βάρη των σωμάτων είναι παράλληλα προς τον άξονα και δεν έχουν ροπή, συνεπώς η μόνη ροπή είναι αυτή που δημιουργεί η δύναμη F.

Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα (κάτοψη) βρίσκουμε:

$$\tau_F=\tau_{Fy}=F_y\cdot\ell = F\cdot\ell\cdot ημθ$$

και με αντικατάσταση τ= 5N·m.



Βλέπουμε ότι στο στερεό ασκείται σταθερή ροπή, συνεπώς θα έχουμε και σταθερό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \to \frac{\Delta L}{\Delta t} = \tau \to \frac{L - 0}{t} = \tau \to$$

$$L=\tau \cdot t$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $L=10 kg\cdot m^2/s$.

Όπου το διάνυσμα είναι πάνω στον άξονα με κατεύθυνση προς τα πάνω.

ii) Κατά την αλλαγή θέσης του σώματος Σ, δεν ασκήθηκε στο σύστημα καμιά εξωτερική ροπή, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος παρέμεινε σταθερή.

$$\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετ}$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \ (2)$$

Όπου I_1 και I_2 η αρχική και τελική ροπή αδράνειας του στερεού και ω_1 και ω_2 οι αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες, οι οποίες έχουν την διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω.

$$\text{Αλλά } I_1 = 1/3\, M\ell^2 + m_1\ell^2/4 = 8 kg\cdot m^2.$$

$$I_2 = 1/3\, M\ell^2 + m_1\cdot\ell^2 = 20 kg\cdot m^2.$$

Ενώ $\omega_1 = L/I_1 = 10/8\ rad/s = 1{,}25\ rad/s$, οπότε από την (2) παίρνουμε:

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} = \frac{10}{20} rad/s = 0{,}5 rad/s$$

α) Για το σώμα Σ έχουμε:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ}$$

οπότε δουλεύοντας με τα μέτρα τους (μιας και οι δυο στροφορμές έχουν την ίδια κατεύθυνση) έχουμε:

$$\Delta L = m_1\cdot\upsilon_2\cdot\ell - m_1\cdot\upsilon_1\cdot\ell/2 = m_1\ell^2\cdot\omega_2 - ¼\ m_1\ell^2\cdot\omega_1 = m_1\ell^2(\omega_2 - ¼\ \omega_1)$$

Με αντικατάσταση $\Delta L_Σ = 4\cdot4(0{,}5 - ¼\cdot1{,}25)\ kg\cdot m^2/s = +3\ kg\cdot m^2/s$.

β) Για τη ράβδο εξάλλου:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ}$$

$$\Delta L = I_τ\cdot\omega_2 - I\cdot\omega_1$$

Όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.

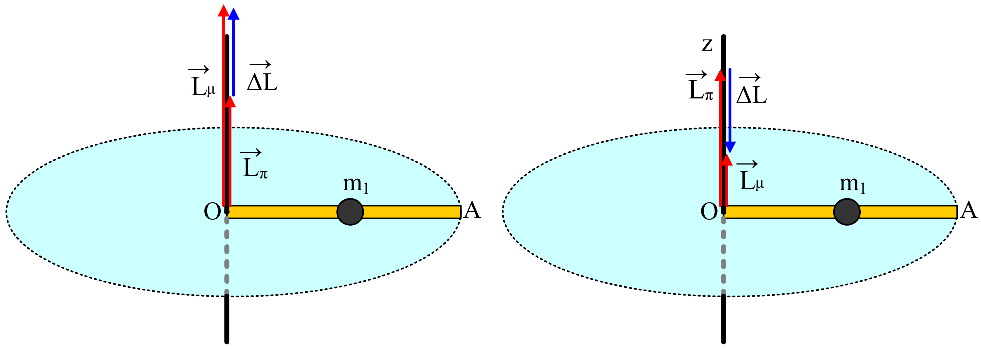
Συνεπώς:

$$\Delta L_ρ = I(\omega_2 - \omega_1) = 1/3\, M\ell^2\,(\omega_2 - \omega_1)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\Delta L_ρ = 1/3\cdot 3\cdot4(0{,}5 - 1{,}25) = -3\ kg\cdot m^2/s.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα αντίστοιχα διανύσματα για τις στροφορμές των δύο σωμάτων.



Σώμα Σ Ράβδος

γ) $\Delta E_{μηχ} = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2$
και με αντικατάσταση ΔΕ= 3,75J.

Παρατηρήσεις:

1) Αν σε ένα στερεό ασκείται σταθερή ροπή, μπορούμε εύκολα να βρούμε τη μεταβολή της στροφορμής, συνεπώς και στροφορμή από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, μετατρέποντας την παράγωγο dL/dt σε πηλίκο μεταβολών $\Delta L/\Delta t$.

2) Όταν έχουμε ένα σύστημα σωμάτων και διατηρείται η στροφορμή, αυτό δεν σημαίνει ότι διατηρείται και η στροφορμή κάθε επιμέρους σώματος. Στο παράδειγμά μας μεταβάλλεται και η στροφορμή του σώματος Σ και η στροφορμή της ράβδου. Απλά αυτές οι μεταβολές είναι αντίθετες. Θα μπορούσαμε με άλλα λόγια να αποδώσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το παραπάνω σύστημα, γράφοντας την εξίσωση:

$$\Delta \vec{L}_1 + \Delta \vec{L}_2 = 0$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης