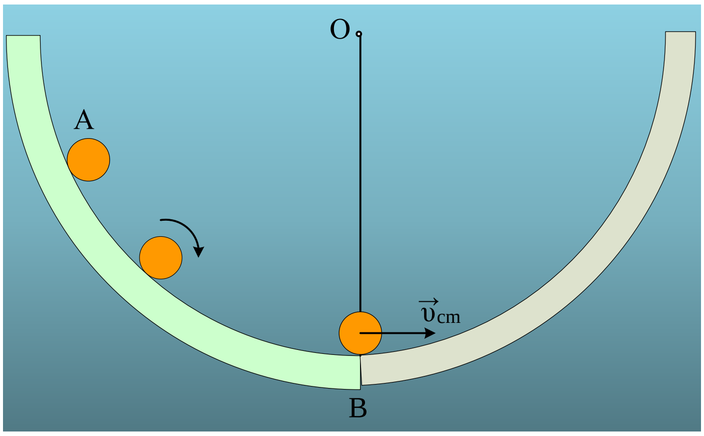
# *Σφαίρα κατά μήκος δύο τεταρτοκυκλίων.*




Μια σφαίρα μάζας 0,5kg και ακτίνας r=5cm, αφήνεται να κινηθεί στο σημείο Α του αριστερού τεταρτοκυκλίου με το οποίο παρουσιάζει μικρή τριβή, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα κάτω στρεφόμενη μεν, αλλά και ολισθαίνοντας. Έτσι φτάνει στην βάση των τεταρτοκυκλίων Β έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}$=2m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=20rad/s, όπου και συνεχίζει την κίνησή της στο δεξιό τεταρτοκύκλιο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,4. Τα δύο τεταρτοκύκλια έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες R=1m, ενώ η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι $I=\frac{2}{5}mr^2$ και $g=10m/s^2$.

Για τη θέση, αμέσως μόλις μπει στο δεξί τεταρτοκύκλιο, ζητούνται:

i) Η ιδιοστροφορμή (spin) της σφαίρας ως προς τον άξονά της.

ii) Η τροχιακή της στροφορμή ως προς οριζόντιο άξονα x που περνά από το κέντρο Ο του τεταρτοκυκλίου.

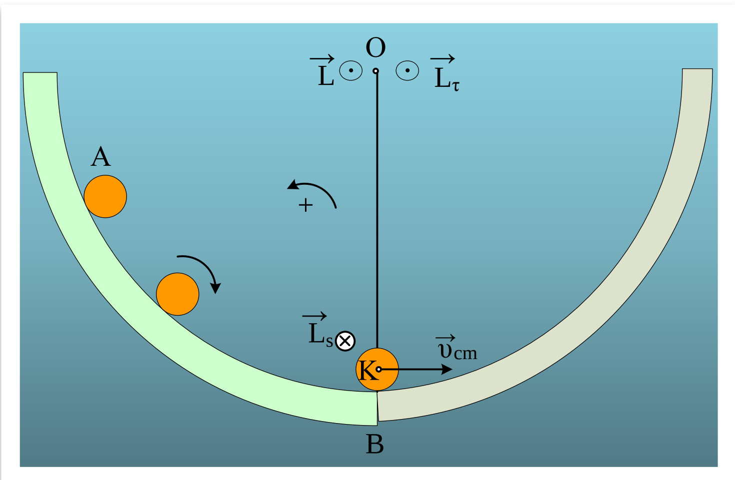
iii) Η (συνολική) στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα x.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς:

α) τον άξονα ιδιοπεριστροφής της

β) τον άξονα x.

**Απάντηση:**



i) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς την διάμετρό της, γύρω από την οποία στρέφεται έχει μέτρο:

$$L_s = I\cdot\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}0,5\cdot 25\cdot 10^{-4}\cdot 20kgm^2/s = 0,01kgm^2/s$$

Με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα.

ii) Η αντίστοιχη τροχιακή στροφορμή ως προς τον άξονα x, έχει μέτρο:

$$L_\tau = m\upsilon_{cm}(R-r) = 0,5\cdot 2\cdot 0,95kgm^2/s = 0,95\ kg\cdot m^2/s$$

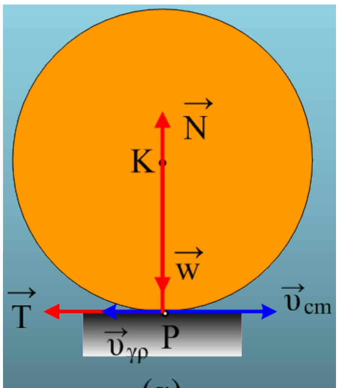
Επίσης κάθετη στο επίπεδο κίνησης, με φορά προς τα έξω, (βλέπε σχήμα).

iii) Η (συνολική) στροφορμή της σφαίρας κατά (ως προς) τον άξονα x, ο οποίος περνά από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης, είναι το διανυσματικό διάνυσμα των δύο παραπάνω στροφορμών και θεωρώντας θετική τη φορά προς τα έξω έχουμε:

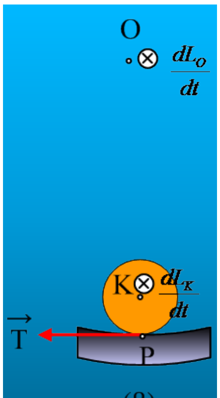
$$L = L_\tau - L_s = 0,95\ kgm^2/s - 0,01\ kgm^2/s = 0,94\ kgm^2/s$$

Επίσης κάθετη στο επίπεδο κίνησης, με φορά προς τα έξω, (βλέπε σχήμα).

iv) Παίρνουμε τη σφαίρα αμέσως μόλις περνά στο δεξιό τεταρτοκύκλιο. Αν P το σημείο επαφής της με το έδαφος, αυτό έχει μια ταχύτητα ίση με $\upsilon_{cm}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega r$ → $\upsilon_{\gamma\rho} = 20\cdot 0,05m/s = 1m/s$, όπως στο σχήμα (α). Κατά συνέπεια το σημείο P έχει ταχύτητα προς τα δεξιά, η σφαίρα ολισθαίνει και δέχεται τριβή ολίσθησης T=μ·N με φορά προς τα αριστερά.



(α)



(β)

Όμως η σφαίρα (θεωρούμενη υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση κέντρου Ο, οπότε η συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, συνεπώς:

$$N - w = m\cdot\frac{\upsilon_{cm}^2}{R'} = m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R-r} \quad ή\ N = mg + m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R-r} = 0,5\cdot 10N + 0,5\frac{2^2}{1-0,05}N = 7,1N$$

Έτσι το μέτρο της τριβή είναι T=μ·N=0,4·7,1N=2,84N.

α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά τον άξονα ιδιοπεριστροφής της (κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς στο κέντρο Κ) έχει μέτρο:

$$\frac{dL_s}{dt} = \tau = T\cdot r = 2,84\cdot 0,05kg\cdot m^2/s = 0,142\ kg\cdot m^2/s^2.$$

Με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα (β).

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά τον άξονα x (κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς στο κέντρο Ο του τεταρτοκυκλίου) έχει μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \tau = T \cdot R = 2{,}84 \cdot 1 \text{kg·m}^2/\text{s} = 2{,}84 \text{ kg·m}^2/\text{s}^2.$$

Με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα (β).

**Σχόλια:**

1) Θεωρώντας θετική φορά, την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, έχουμε:

$$L_s = I \cdot \omega = -0{,}01 \text{ kg·m}^2/\text{s}$$

$$L_\tau = m\upsilon_{cm}(R-r) = +0{,}95 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$L = L_\tau + L_s = +0{,}94 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$\frac{dL_s}{dt} = \tau = -0{,}142 \text{ kg·m}^2/\text{s}^2.$$

$$\frac{dL}{dt} = \tau = -2{,}84 \text{ kg·m}^2/\text{s}^2.$$

Από τις παραπάνω τιμές εξάγεται ότι η ιδιοστροφορμή της σφαίρας αυξάνεται (η ροπή της τριβής επιταχύνει την περιστροφική κίνηση, αυξάνοντας τη γωνιακή ταχύτητα ω της σφαίρας), ενώ μειώνει την τροχιακή στροφορμή (μειώνει την ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ του κέντρου Κ).

2) Και αν ζητηθεί ο ρυθμός μεταβολής της τροχιακής στροφορμής κατά τον άξονα x; Μα τότε η σφαίρα αντιμετωπίζεται, ως υλικό σημείο, όπου οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο της και $dL_\tau/dt = \Sigma\tau = -T \cdot (R-r)$.

Πράγματι $\frac{dL_\tau}{dt} = \frac{d(m\upsilon_{cm}(R-r))}{dt} = ma_{cm}(R-r) = -T \cdot (R-r) = -2{,}698 \text{ kg·m}^2/\text{s}^2.$

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

***Διονύσης Μάργαρης***