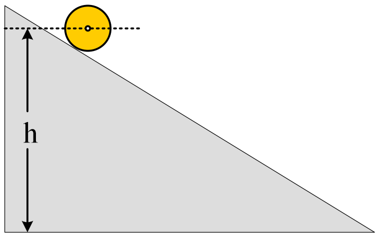
3.5 Έργο- Ενέργεια. Ερωτήσεις με δικαιολόγηση

1) **Η σφαίρα κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο.**

Από το ίδιο ύψος h σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες Α και Β, οι οποίες κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Η σφαίρα Α έχει μάζα m και ακτίνα R, ενώ η Β έχει μάζα 3m και ακτίνα $\frac{R}{2}$.



i) Για τα χρονικά διαστήματα t_A και t_B που απαιτούνται για να φτάσουν στη βάση του επιπέδου ισχύει:

α) $t_A < t_B$ β) $t_A = t_B$ γ) $t_A > t_B$.

ii) Για τις τελικές ταχύτητες $υ_A$ και $υ_B$ ισχύει:

α) $υ_A < υ_B$ β) $υ_A = υ_B$ γ) $υ_A > υ_B$.

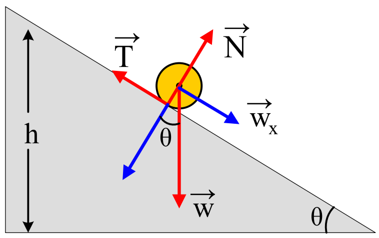
iii) Ο λόγος $\frac{K_A}{K_B}$, όπου K_A και K_B οι τελικές κινητικές ενέργειες των δύο σφαιρών λόγω περιστροφής, είναι ίσος με:

α) 1 β) 3 γ) $\frac{1}{3}$

Για τη σφαίρα $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε μια σφαίρα που κυλίεται κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου.



Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$ΣF_x = m \cdot α_{cm} \rightarrow$$
$$mgημθ - T = mα_{cm} \ (1)$$

Αντίστοιχα για την στροφική κίνηση και θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές έχουμε:

$$Στ = I \cdot α_{γων} \rightarrow T \cdot R = \frac{2}{5}mR^2 \cdot α_{γων} \rightarrow T = \frac{2}{5}m \cdot R \cdot α_{γων} \ (2)$$

Αλλά αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $α_{cm} = α_{γων} \cdot R$ και η (2) γίνεται:

$$T = \frac{2}{5}m \cdot α_{cm} \ (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$mg\,ημθ = \frac{7}{5}ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{5}{7} g\eta\mu\theta \quad (4)$$

Η σχέση (4) μας λέει ότι η μεταφορική κίνηση της σφαίρας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, όπου η επιτάχυνση δεν εξαρτάται ούτε από την μάζα της, ούτε από την ακτίνα της.

Έτσι για τη σφαίρα ισχύουν:

$$x = ½\, \alpha_{cm} \cdot t^2 \text{ και } \upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t$$

Αφού οι δύο σφαίρες διανύουν ίσες αποστάσεις θα φτάσουν στον ίδιο χρόνο στη βάση του επιπέδου με ίσες ταχύτητες κέντρου μάζας. Έτσι οι σωστές απαντήσεις είναι:

i) β) και

ii) β).

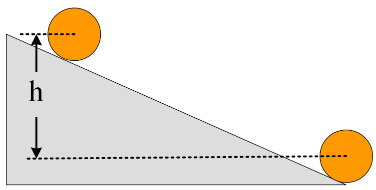
iii) Για το λόγο των κινητικών ενεργειών λόγω περιστροφής έχουμε:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2} I_A \omega_A^2}{\frac{1}{2} I_B \omega_B^2} = \frac{\frac{2}{5} mR^2 \omega_A^2}{\frac{2}{5} 3m\left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega_B^2} = \frac{\upsilon_A^2}{3\upsilon_B^2} = \frac{1}{3}$$

Σωστή πρόταση η γ).

2) **Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος.**

Κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, από το ίδιο ύψος αφήνονται ένας κύλινδρος και μια σφαίρα της ίδιας ακτίνας με ίσες μάζες. Τα δυο στερεά κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Με δεδομένο ότι ο κύλινδρος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τη σφαίρα ($I_1 > I_2$):



i) Φτάνοντας στη βάση του επιπέδου μεγαλύτερη κινητική ενέργεια έχει:

α) Ο κύλινδρος, β) Η σφαίρα, γ) Έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

ii) Με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας φτάνει στη βάση του επιπέδου:

α) Ο κύλινδρος, β) Η σφαίρα, γ) Έχουν ίσες ταχύτητες.

iii) Μεγαλύτερη τριβή κατά τη διάρκεια της κίνησης ασκήθηκε:

α) στον κύλινδρο, β) στη σφαίρα, γ) ασκήθηκαν τριβές ίσου μέτρου.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Αφού τα στερεά κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, δέχονται δύναμη στατικής τριβής (η ροπή της οποίας προκαλεί την περιστροφή τους) το έργο της οποίας είναι μηδενικό. Άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \quad (1)$$

Οπότε θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη ποιο χαμηλή θέση, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας έχουμε:

$$K_{τελ}= U_{αρχ}=mgh$$

Συνεπώς τα δύο στερεά φτάνουν στη βάση του επιπέδου έχοντας ίσες κινητικές ενέργειες.

ii) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$mgh = ½ mυ_{cm}^2 + ½ I·ω^2$$

Αλλά κατά την κύλιση θα ισχύει $υ_{cm}=ω·R$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{2mgR^2h}{mR^2+I}}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας, θα αποκτήσει, το στερεό με την μικρότερη ροπή αδράνειας, συνεπώς η σφαίρα.

iii) Για την κίνηση κάθε στερεού ισχύει:

$$ΣF_x=m·α_{cm} \rightarrow mgημθ\text{-}T=mα_{cm} \quad (2)$$

$$\text{Και } T·R= I·α_{γων} \rightarrow T=\frac{I}{R^2}a_{cm} \quad (3)$$

$$\text{Αφού } α_{cm}=α_{γων}·R$$

Με πρόσθεση των (2) και (3) παίρνουμε:

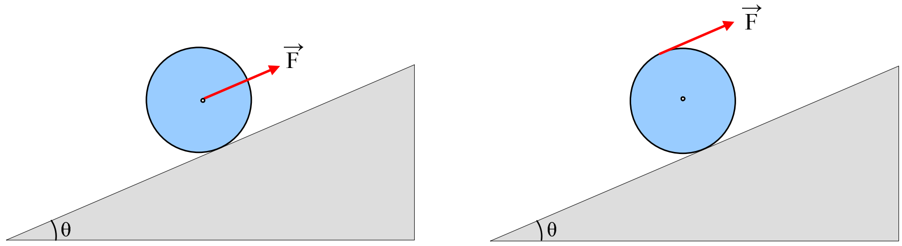
$$a_{cm}=\frac{mgR^2ημθ}{mR^2+I}\text{, οπότε}$$

$$T=\frac{I}{R^2}\cdot\frac{mgR^2ημθ}{mR^2+I}=\frac{mg\,ημθ}{\frac{mR^2}{I}+1}$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ασκούμενη στατική τριβή, συνεπώς μεγαλύτερη τριβή θα ασκηθεί στον κύλινδρο.

3) **Ένας κύλινδρος σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο.**

Πάνω σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ=30°, τοποθετούμε ένα κύλινδρο μάζας 20kg, ενώ πάνω του ασκούμε δύναμη F=100N, όπως στο πρώτο σχήμα (α).



(α) (β)

α) Αν $g=10m/s^2$, ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

i) Ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα πάνω.

ii) Ο κύλινδρος θα περιστραφεί με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

iii) Η τριβή έχει φορά προς τα πάνω.

iv) Ο κύλινδρος ηρεμεί.

β) Αν η δύναμη ασκείτο εφαπτομενικά όπως στο σχήμα (β):

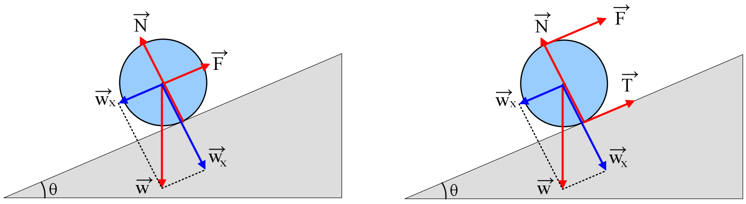
i) Ο κύλινδρος ηρεμεί.

ii) Ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας.

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι ανάλογος προς το χρόνο κίνησης.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι ίσος με F·Rω.

Απάντηση:



α) Στο (α) σχήμα W_x=mgημθ = 20·10· ½ = 100N, άρα ο κύλινδρος ηρεμεί χωρίς να δέχεται δύναμη τριβής και χωρίς να περιστρέφεται.

β) Και στο δεύτερο σχήμα $F=W_x$ αλλά επειδή η δύναμη έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, τείνει να περιστραφεί και γι' αυτό εμφανίζεται τριβή όπως στο σχήμα.

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \text{ ή}$$

$$T=m\alpha_{cm}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας είναι:

$$dK/dt= dW_{ολ}/dt = \Sigma F\cdot\upsilon = T\cdot\alpha_{cm}\cdot t$$

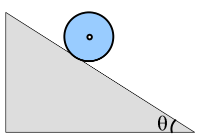
ενώ αντίστοιχα για την περιστροφική κινητική ενέργεια θα έχουμε:

$$dK_{στρ}/dt= dW_{ολ}/dt = FR\cdot\omega - TR\cdot\omega$$

έτσι οι απαντήσεις είναι:

Λ Σ Σ Λ

4) **Στερεό με κυκλική διατομή.**



Κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου αφήνεται να κινηθεί ένα στερεό με κυκλική διατομή (σφαίρα, δίσκος, στεφάνη ή κύλινδρος) ακτίνας R και μάζας M, η ροπή αδράνειας του οποίου δίνεται από τη σχέση $I=\lambda\cdot MR^2$. Το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Καθώς το στερεό κατέρχεται ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική του ενέργεια:

α) αυξάνεται β) μειώνεται γ) παραμένει σταθερός.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια είναι:

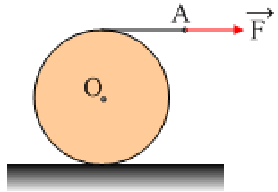
$$\frac{K_\mu}{K_\pi}=\frac{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2}=\frac{M\upsilon_{cm}^2}{\lambda MR^2\omega^2}=\frac{\upsilon_{cm}^2}{\lambda(R\omega)^2}=\frac{1}{\lambda}$$

αφού κατά την κύλιση ισχύει $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$

Συνεπώς ο λόγος παραμένει σταθερός καθώς κατέρχεται το στερεό.

5) **Έργο δύναμης και έργο ροπής.**

Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας R=0,4m, ο οποίος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη F=10N. Μετά από λίγο ο κύλινδρος έχει μετακινηθεί κατά x=16m, ενώ έχει περιστραφεί κατά γωνία θ=80rad. Από το νήμα ασκείται στον κύλινδρο μια δύναμη (η τάση του νήματος) με μέτρο T=F.



α) Πόσο είναι το έργο της τάσης Τ (σαν δύναμης) για τη μεταφορική κίνηση.

β) Πόσο είναι το έργο της ροπής της τάσης;

γ) Η συνολική ενέργεια που μεταφέρεται στον κύλινδρο είναι:

i) 160J, ii) 320J, iii) 480J.

δ) Το σημείο Α έχει μετακινηθεί κατά:

i) 16m, ii) 32m, iii) 48m.

ε) Να βρεθεί η μεταφορική και η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

Απάντηση:

α) Το έργο της τάσης Τ (για τη μεταφορική κίνηση) είναι:

$$W_T=T\cdot x\cdot \text{συν}0°=10\cdot 16\text{J}=160\text{J}.$$

β) Το έργο μιας ροπής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_\tau=\tau\cdot\theta=T\cdot R\cdot\theta=10\cdot 0{,}4\cdot 80\text{J}=320\text{J}.$$

γ) Η συνολική ενέργεια είναι:

$$W=W_T+W_\tau=160\text{J}+320\text{J}=480\text{J}.$$

δ) Το συνολικό έργο της δύναμης Τ είναι ίσο με το έργο της δύναμης F όπου:

$$W_{ολ}=F\cdot x_A\cdot\text{συν}0°$$

Όπου x_A η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, του σημείου Α.

Οπότε:

$$x_A=W/F=480/10\text{m}=48\text{m}.$$

Τη μετατόπιση του άκρου Α μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

Το μήκος του νήματος που ξετυλίχθηκε, συνδέεται με τη γωνία στροφής του κυλίνδρου με τη σχέση:

$$s=\theta\cdot R=80\cdot 0{,}4\text{m}=32\text{m}$$

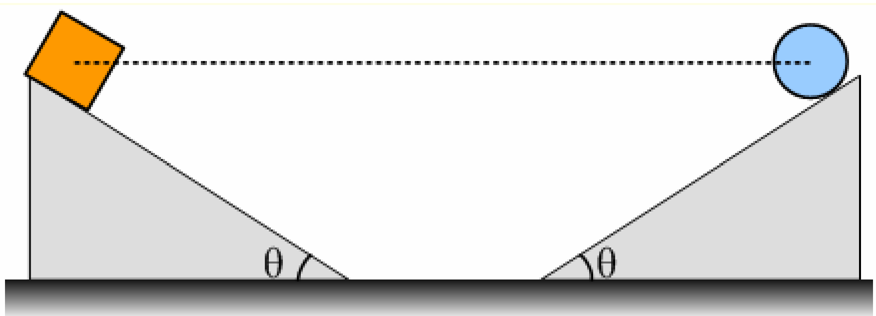
Άρα το άκρο Α μετατοπίσθηκε κατά:

$$x_A = x + s = 16m + 32m = 48m.$$

ε) Το έργο της τάσης (σαν δύναμης) εκφράζει την μεταβολή της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, δηλαδή $K_{μετ}$ = 160J, ενώ το έργο της ροπής εκφράζει την μεταβολή της Περιστροφικής κινητικής ενέργειας, δηλαδή $K_{περ}$=480J.

6) **Ολίσθηση κύβου και κυλίνδρου**

Κατά μήκος δυο ομοίων κεκλιμένων επιπέδων και από το ίδιο ύψος αφήνονται να κινηθούν δύο ομογενή στερεά, ένας κύβος και ένας κύλινδρος της ίδιας μάζας m. Τα δύο σώματα παρουσιάζουν με τα επίπεδα τον ίδιο συντελεστή τριβής και ολισθαίνουν κατά μήκος των δύο επιπέδων.

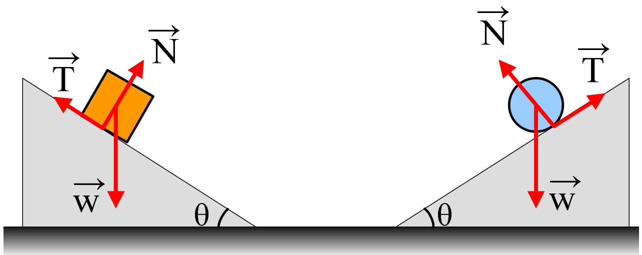


Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

i) Στο οριζόντιο επίπεδο θα φτάσει πρώτος ο κύλινδρος επειδή περιστρέφεται.
ii) Ο κύβος θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας.
iii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει τελικά ο κύλινδρος.

Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, τα οποία αφού ολισθαίνουν δέχονται δύναμη τριβής ολίσθησης T=μ·N=μmg



Για την κίνηση του κύβου:

$$mgημθ - T = mα_1$$

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$mgημθ - T = mα_2$$

Συνεπώς τα δύο στερεά θα κινηθούν με την ίδια επιτάχυνση και θα φτάσουν στο οριζόντιο επίπεδο, μετά από ίσους χρόνους και με ταχύτητες κέντρου μάζας, ίσου μέτρου, αφού διανύουν ίσες αποστάσεις.

Όμως, ενώ ο κύβος θα έχει μόνο μεταφορική κινητική ενέργεια:

$$K_1 = ½\, mυ^2$$

ο κύλινδρος, εξαιτίας της ροπής της τριβής, θα αποκτήσει και γωνιακή επιτάχυνση, οπότε θα περιστραφεί.

Έτσι φτάνοντας στο οριζόντιο επίπεδο θα έχει και περιστροφική κινητική ενέργεια, συνεπώς θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2= ½\ mυ^2 + ½\ I·ω^2.$$

Προφανώς λοιπόν θα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από τον κύβο.

Έτσι οι απαντήσεις είναι:

i) Στο οριζόντιο επίπεδο θα φτάσει πρώτος ο κύλινδρος αφού θα περιστραφεί. **Λ.**

ii) Ο κύβος θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας. **Λ.**

iii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει τελικά ο κύλινδρος. **Σ.**

Σχόλιο.

Το έργο της τριβής που ασκείται στον κύβο εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται από τον κύβο και μετατρέπεται σε θερμική.

Αντίθετα το έργο της τριβής ολίσθησης κατά τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου, κατά ένα μέρος μετράει την ενέργεια που μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική και το υπόλοιπο μετατρέπεται σε θερμική.

Εξάλλου αν ο κύβος γλίστρησε κατά s (το μήκος του επιπέδου), ο κύλινδρος γλίστρησε κατά:

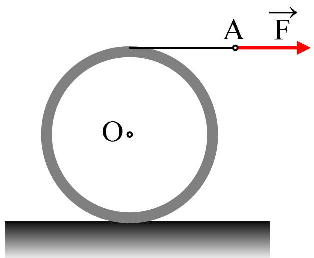
$$x= s-θ·R$$

όπου θ·R είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειάς του, λόγω της κυκλικής κίνησής του. Έτσι η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική θα είναι:

$$|W_{Τολ}|=T·x<T·s$$

7) **Μια στεφάνη σε λείο επίπεδο.**

Μια στεφάνη ακτίνας R και μάζας M η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά της, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Γύρω από τη στεφάνη έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα.



A) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i) Η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

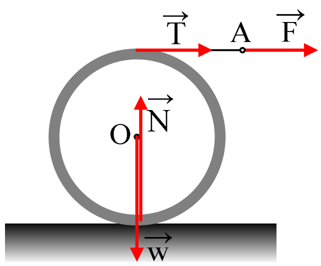
ii) Για μετακίνηση του κέντρου Ο κατά x_1 το έργο της δύναμης είναι ίσο με $F·x_1$.

iii) Όταν το άκρο Α του νήματος μετατοπισθεί κατά x η στεφάνη θα έχει μεταφορική κινητική ενέργεια ½ F·x.

B) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις αν το οριζόντιο επίπεδο δεν ήταν λείο;

Απάντηση:

A) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη, όπου Τ η τάση του νήματος, ίση κατά μέτρο με την ασκούμενη δύναμη F. Η στεφάνη θα κάνει μια σύνθετη κίνηση, η οποία θεωρούμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο που περ-



νά από το κέντρο της Ο.

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε επιμέρους κίνηση:

Για την μεταφορική $\Sigma F=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow T=M\cdot\alpha_{cm}$ ή

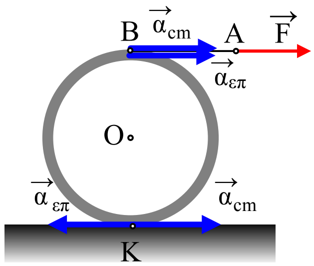
$$a_{cm}=\frac{F}{M} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση και θεωρώντας θετική φορά την φορά που στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{F}{MR} \quad (2)$$

i) Αλλά τότε το σημείο επαφής Κ της στεφάνης με το έδαφος έχει συνολική επιτάχυνση:



$$\alpha_K=\alpha_{cm}-\alpha_{\varepsilon\pi}=\frac{F}{M}-\frac{F}{MR}R=0$$

Οπότε αυτό το σημείο δεν παρουσιάζει καμιά κίνηση ως προς το έδαφος και η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η πρόταση είναι σωστή.

ii) Το ανώτερο σημείο Β εξάλλου έχει και τις δύο παραπάνω επιταχύνσεις προς τα δεξιά, συνεπώς η συνολική του επιτάχυνση θα είναι:

$\alpha_B= \alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi}= 2\,\alpha_{cm}$, ίση με την επιτάχυνση του άκρου Α του νήματος.

Η μετατόπιση του κέντρου Ο δίνεται από τη σχέση $x_1= ½\,\alpha_{cm}\cdot t^2$, ενώ η μετατόπιση του άκρου του νήματος Α $x_A= ½\,2\,\alpha_{cm}\cdot t^2 = 2x_1$, συνεπώς το έργο της δύναμης θα είναι ίσο με $2F\cdot x_1$ και η πρόταση είναι λάθος.

iii) Για μετατόπιση του άκρου Α κατά x, το έργο της δύναμης θα είναι ίσο:

$$W_F= F\cdot x$$

Τόση θα είναι η ενέργεια που δόθηκε στη στεφάνη, συνεπώς τόση θα είναι και η κινητική της ενέργεια, $K_{ο\lambda}=F\cdot x$.

$$\text{Αλλά } K_{ο\lambda}= ½\, m\upsilon_{cm}^2 + ½\, I\cdot\omega^2 = ½\, m\upsilon_{cm}^2 + ½\, MR^2\omega^2 = 2\cdot ½\, m\upsilon_{cm}^2.$$

$$\text{Άρα } K_{\mu\varepsilon\tau}=½\, m\upsilon_{cm}^2 = ½\, K_{ο\lambda}= ½\, F\cdot x$$

Και η πρόταση είναι σωστή.

Β) Αν το επίπεδο δεν ήταν λείο, η κατάσταση δεν θα άλλαζε σε τίποτα. Από τη στιγμή που η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, δεν υπάρχει λόγος να ασκηθεί τριβή…

Μπορείτε να δοκιμάσετε βάζοντας τριβή και εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα για να την υπολογίστε.

Σχόλιο:

Το έργο της δύναμης θα μπορούσε να υπολογιστεί και ως εξής:

$$W_{ο\lambda} =W_F+W_\tau= F\cdot x+FR\cdot\theta$$

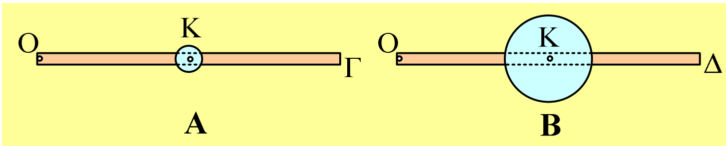
Όπου W_F το έργο για τη μεταφορική κίνηση και x η μετατόπιση του κέντρου μάζας O, ενώ $W_τ$ το αντίστοιχο έργο της ροπής για τη στροφική κίνηση όπου θ η γωνία στροφής.

Αλλά αφού η στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει x=θ·R και τότε:

$$W=W_F+W_τ= F·x+FR·θ = 2\ F·x.$$

Εξάλλου το έργο της F για τη μεταφορική κίνηση είναι ίσο με την μεταφορική κινητική ενέργεια της στεφάνης, ενώ το έργο της ροπής, ίσο αντίστοιχα με την περιστροφική κινητική της ενέργεια. Στο παραπάνω παράδειγμα βέβαια, τα έργα αυτά (και οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες) είναι ίσα.

8) **Το υλικό σημείο και η σφαίρα.**



Μια ομογενής λεπτή ράβδος μήκους ℓ και μάζας M, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O. Στο μέσον K της ράβδου έχει προσδεθεί μια σφαίρα ίσης μάζας M (έχουμε τρυπήσει τη σφαίρα κατά μήκος μιας διαμέτρου στην οποία εισχωρήσαμε τη ράβδο), δημιουργώντας έτσι ένα νέο στερεό. Στο πρώτο σχήμα η ακτίνα της σφαίρας είναι μικρή (στερεό A), οπότε την θεωρούμε αμελητέα, ενώ στο δεύτερο σχήμα (στερεό B) η σφαίρα έχει ακτίνα R. Τα δύο στερεά συγκρατούνται σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και σε μια στιγμή αφήνονται να κινηθούν.

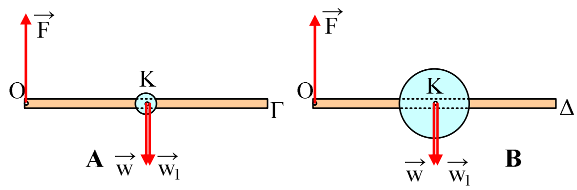
Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i) Μεγαλύτερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει το στερεό A.
ii) Μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την κίνηση των στερεών θα αποκτήσει το σημείο Γ.
iii) O αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μεγαλύτερος για το A στερεό.
iv) H σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα θα αποκτήσει και μεγαλύτερη μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της I_1= 1/3 $Mℓ^2$ και η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως της άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό της I_2= 2/5 MR^2.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο στερεά.



Παίρνοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του στερεού γύρω από το άκρο O έχουμε:

$$Στ=I·α_{γων}\ \text{ή}\ 2Mg= I·α_{γων}\ \text{ή}\ α_{γων}=\frac{2Mg}{I}\quad (1)$$

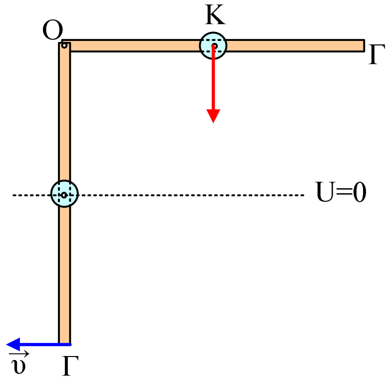
Αλλά για τις ροπές αδράνειας έχουμε:

$$I_A = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}M\ell^2. \quad (2)$$

$$I_B = I_\rho + I_\sigma = \frac{1}{3}M\ell^2 + \left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{12}M\ell^2 + \frac{2}{5}MR^2 \quad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής έχει το Β στερεό συνεπώς με βάση την σχέση (1) θα αποκτήσει μικρότερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση. Η πρόταση είναι σωστή.

ii) Τα στερεά επιταχύνονται μέχρι που η ράβδος να γίνει κατακόρυφη, οπότε αποκτούν και τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Η μηχανική ενέργεια ανάμεσα στην αρχική θέση και στη θέση που η ράβδος είναι κατακόρυφη, παραμένει σταθερή, αφού η μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη, που είναι συντηρητικές δυνάμεις, οπότε έχουμε:



$K_{αρχ}+U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ}$ ή

$2Mgh = ½\ I\omega^2$ ή

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Τη μεγαλύτερη ταχύτητα την έχει το κατώτερο σημείο της ράβδου:

$$\upsilon_{γραμ} = \omega \cdot \ell = \ell\sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Όμως το στερεό Α έχει μικρότερη ροπή αδράνειας, συνεπώς το κάτω άκρο του Γ θα αποκτήσει και τη μεγαλύτερη ταχύτητα. Η πρόταση είναι σωστή.

iii) Μόλις τα στερεά αφεθούν να κινηθούν, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής είναι (θεωρούμε θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = 2Mg \cdot \frac{\ell}{2}$$

Συνεπώς οι δυο ρυθμοί είναι ίσοι. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

iv) Η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας είναι μέγιστη στην κατώτερη θέση. Η κινητική αυτή ενέργεια για τη σφαίρα αμελητέας ακτίνας είναι:

$$K_1 = ½\ M\upsilon_K^2 = \frac{1}{2}M\omega^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 = \frac{1}{8}M\frac{Mg\ell}{\frac{7}{12}M\ell^2}\ell^2$$

$$K_1 = \frac{3}{14}Mg\ell$$

Ενώ για την σφαίρα ακτίνας R είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} M\upsilon_K^2 + \frac{1}{2} I_\sigma \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} M\omega^2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} MR^2\omega^2 = \frac{1}{8} M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5} M\omega^2 R^2$$

$$K_2 = \frac{1}{8} M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5} M\omega^2 R^2 = M\left(\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2\right)\frac{Mg\ell}{M\left(\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2\right)}$$

$$K_2 = \frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} Mg\ell$$

$$\text{Αλλά } \frac{\frac{1}{8}\ell^2 + \frac{1}{5}R^2}{\frac{7}{12}\ell^2 + \frac{2}{5}R^2} Mg\ell > \frac{3}{14}$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

Σχόλιο:

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα μπορούσε να υπολογιστεί σαν μόνο περιστροφική κινητική γύρω από τον άξονα στο άκρο O:

$$K_2 = \frac{1}{2} I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\omega^2 = \frac{1}{8}M\omega^2\ell^2 + \frac{1}{5}M\omega^2R^2$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης