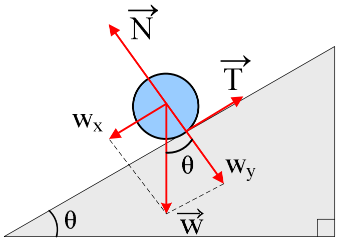
Εφαρμογή του ΘΜΚΕ και της ΑΔΜΕ

Ένας κύλινδρος μάζας 30kg και ακτίνας R=0,4m αρχίζει να ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ =30°. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, έχοντας αρχική ταχύτητα $υ_0$=10m/s. Να βρεθεί η ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου μετά από μετατόπιση κατά x=15m.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ mR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα. Γιατί αλήθεια η τριβή έχει φορά προς τα πάνω;

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση:

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 - \tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 = W_{wx} + W_{wy} + W_T + W_N \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 - \tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 = -mg\cdot ημθ\cdot x + T\cdot x \quad (1)$$

Παίρνουμε ξανά τώρα το θεώρημα έργου – ενέργειας για την στροφική κίνηση:

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} I\,\omega_0^2 = W_T \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} mR^2\cdot\omega^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} mR^2\cdot\omega_0^2 = -TR\cdot\theta \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{4} m\upsilon_1^2 - \tfrac{1}{4} m\upsilon_0^2 = -Tx \quad (2)$$

αφού θR=x και ωR=υ

Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$\tfrac{3}{4} m\upsilon_1^2 - \tfrac{3}{4} m\upsilon_0^2 = -mg\cdot ημθ\cdot x \quad (3) \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{4}{3} g\cdot ημθ\cdot x} = \sqrt{100 - \frac{4}{3}\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 15}\, m/s = 0$$

Αν εφαρμόζαμε το θεώρημα έργου – ενέργειας ή το ΘΜΚΕ για τη συνολική κίνηση θα παίρναμε:

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 - \tfrac{1}{2} I\,\omega_0^2 = W_{wx} \quad (4)$$

αφού το έργο της στατικής τριβής είναι συνολικά μηδέν, μιας και δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της

Από την εξίσωση (4) παίρνουμε:

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} mR^2\cdot\omega^2 - \tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} mR^2\cdot\omega_0^2 = -mgημθ\cdot x \text{ ή}$$

$$2\upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 - 2\upsilon_0^2 - \upsilon_0^2 = -4gημθ\cdot x \text{ ή } 3\upsilon_1^2 - 3\upsilon_0^2 = -4\,gημθ\cdot x \text{ ή ξανά}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{4}{3} g\cdot ημθ\cdot x} = \sqrt{100 - \frac{4}{3}\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 15}\, m/s = 0$$

Και αν εφαρμόζαμε την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας; Πρώτα- πρώτα ισχύει αφού στο σώμα ασκείται τριβή;

Η απάντηση είναι ναι. Και τούτο γιατί η τριβή είναι ΣΤΑΤΙΚΗ, οπότε δεν αφαιρεί ενέργεια για να την μετατρέψει σε κάποια άλλη μορφή, όπως είναι η θερμότητα. Έτσι έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega_0^2 = \tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega_1^2 + mgh,$$

όπου υ=ωR και h=xημθ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} mR^2\cdot\omega_0^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} mR^2\cdot\omega^2_1 + mg\cdot x\eta\mu\theta \text{ ή}$$

$$2\upsilon_0^2 + \upsilon_0^2 = 2\upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 + 4gx\eta\mu\theta \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{4}{3} g\cdot\eta\mu\theta\cdot x} = \sqrt{100 - \frac{4}{3}\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 15}\, m/s = 0$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης