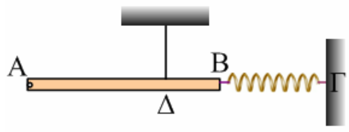
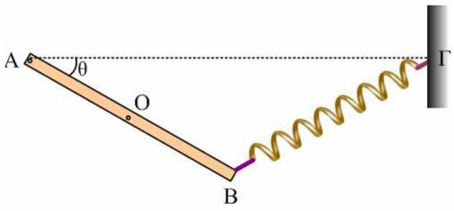
Μια ράβδος, δεμένη και σε ελατήριο.



Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=2m και μάζας 18kg μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όταν το άλλο της άκρο Β δένεται με ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=350N/m και φυσικού μήκους ℓ_0=1,4m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=3,4m, ενώ είναι δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος όπως στο σχήμα.

Κόβουμε το νήμα και η ράβδος πέφτει. Για τη θέση που σχηματίζει γωνία θ=30° με τον ορίζοντα, ζητούνται:



i) Η στροφορμή της ράβδου ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής της.
ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής της.
iii) Η ισχύς της δύναμης του ελατηρίου
iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου.
v) Ο ρυθμός μείωσης της δυναμικής ενέργειας της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= 1/3\ m\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Φέρνοντας την κάθετη προς την ΑΓ από το άκρο Β έχουμε:

$$(AM) = \ell\cdot συνθ = \sqrt{3}m = (AΓ)/2$$

Δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού το ύψος ΒΜ είναι και μεσοκάθετος, οπότε το μήκος του ελατηρίου είναι ίσο με το μήκος της ράβδου δηλαδή 2m.

i) Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, αυτό που περνά από το μέσον Ο της ράβδου στη χαμηλότερη θέση, έχουμε:

$$K_{αρχ}+U_{β,αρχ}+U_{ελ,αρχ}=K_{τελ}+U_{βαρ.τελ}+U_{ελ,τελ} \rightarrow$$

$$mgh = ½\ I\omega^2 + ½\ k\Delta\ell^2 \quad (1)$$

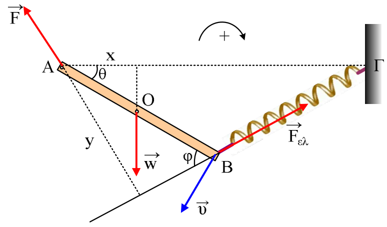
Αλλά $h=\ell/2\cdot ημθ=0,5m$, $\Delta\ell=0,6m$ και $I=1/3\ m\ell^2=24kg\cdot m^2$ και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας:

$$\omega= 1,5rad/s$$

Συνεπώς το μέτρο της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$L=I\cdot\omega= 36kg\cdot m^2/s.$$

Ενώ έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που διαγράφει η ράβδος και φορά προς τα μέσα



ii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στη παραπάνω θέση της έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.

Οπότε για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής στο άκρο Α και θεωρώντας θετικές τις δεξιόστροφες ροπές, όπως στο σχήμα, θα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = -F_{\varepsilon\lambda}\cdot y + w\cdot x$$

όπου x και y οι αποστάσεις του Α από τους φορείς των δυνάμεων. Αλλά x= ½ ℓ·συνθ και y=ℓ·ημφ=ℓ·ημ60°, ενώ $F_{\varepsilon\lambda}$=k·Δℓ, συνεπώς:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = -k\cdot\Delta l\cdot l\cdot\eta\mu 60 + mg\cdot\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$$

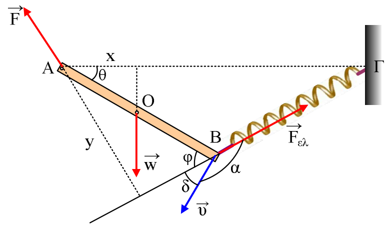
και με αντικατάσταση:

$$\frac{dL}{dt} = -120\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2 .$$

Το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής, είναι κάθετο στο επίπεδο που διαγράφει η ράβδος και με φορά προς τα έξω.

iii) Η ισχύς της δύναμης του ελατηρίου δίνεται από την εξίσωση:

P=$F_{\varepsilon\lambda}$·υ·συνα



Όπου α η γωνία που σχηματίζει η δύναμη του ελατηρίου με την ταχύτητα του άκρου Β.

Αλλά $F_{\varepsilon\lambda}$=k·Δℓ = 210N και α=180°-δ=180-(90°-φ) =90°+60°=150°, ενώ υ_B=ω·ℓ =3m/s

Οπότε:

$$P=210\cdot 3\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}W = -315\sqrt{3}\,W$$

iv) Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega$$

$$\frac{dK}{dt} = -\left|\frac{dL}{dt}\right|\cdot\omega = -180\sqrt{3}J/s$$

v) Για το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -P_w = -\tau\omega - mg\cdot x\cdot\omega = -\frac{1}{2}mgl\omega\sigma\upsilon\nu\theta$$

Με αντικατάσταση:

$$\frac{dU}{dt} = -135\sqrt{3}J/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά $135\sqrt{3}J/s$

Σχόλια.

1) Η δυναμική ενέργεια της ράβδου μειώνεται κατά $135\sqrt{3}J/s$ και η κινητική ενέργεια μειώνεται επίσης

με ρυθμό $180\sqrt{3}J/s$ και όλη αυτή η ενέργεια μεταφέρεται στο ελατήριο, αυξάνοντάς του την δυναμική ενέργεια κατά $315\sqrt{3}\ J/s$. Η μεταφορά αυτή πραγματοποιείται μέσω του έργου της δύναμης του ελατηρίου, που για τη ράβδο είναι αρνητική.

2) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι ίσος με Στ·ω, όπου όμως η συνολική ροπή είναι αρνητική (αριστερόστροφη) ενώ η γωνιακή ταχύτητα θετική (κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα μέσα). Στην πραγματικότητα όμως η ισχύς είναι το μέτρο της ροπής, επί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα μεταξύ τους, αφού είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων. Έτσι το έργο της ροπής είναι αρνητικό, συνεπώς και αρνητική η ισχύς.

3) Για τον υπολογισμό της ισχύος επέλεξα για την δύναμη του ελατηρίου, να την αντιμετωπίσω σαν δύναμη, ενώ για ο βάρος ως ροπή. Προφανώς θα μπορούσαμε να τα δουλέψουμε και αντίστροφα, ή μόνο ως δυνάμεις ή μόνο ως ροπές.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης