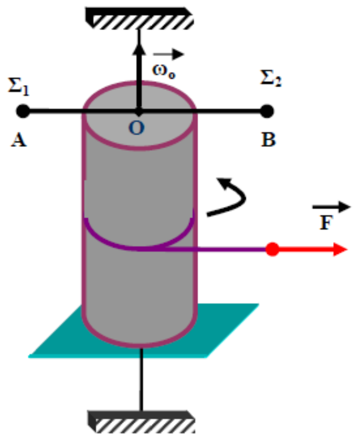
Σύστημα κυλίνδρου - σφαιρών



Ο κύλινδρος του σχήματος, έχει μάζα M =4Kg , ακτίνα R = 0,5m και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο αμετακίνητο άξονα που περνά από τα κέντρα των βάσεών του, στηριγμένος σε μια σταθερή οριζόντια επίπεδη και λεία επιφάνεια. Στην πάνω βάση του κυλίνδρου είναι στερεωμένη οριζόντια αβαρής ράβδος ΑΒ μήκους d = 4R έτσι ώστε να τέμνεται από τον άξονα περιστροφής το μέσον της Ο.

Στα άκρα Α, Β της ράβδου είναι κολλημένα δυο σημειακά σφαιρίδια Σ_1 , Σ_2 με μάζες $m_1 = m_1$ = 0,5Kg. Ένα αβαρές μη εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο, και στο ελεύθερο άκρο του δέχεται σταθερή οριζόντια δύναμη **F** .

Τη χρονική στιγμή t = 0, η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος έχει αλγεβρική τιμή ω_o= +2rad/s, ενώ, τη χρονική στιγμή t_1= 4 s, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι 30 J/s.

Αν η ροπή της **F** ως προς τον άξονα περιστροφής έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega_o}$ να υπολογιστούν:

i) Η κινητική ενέργεια του συστήματος την χρονική στιγμή t_1.

ii) Το έργο της δύναμης **F** από την χρονική στιγμή t = 0 , μέχρι την χρονική στιγμή t_1.

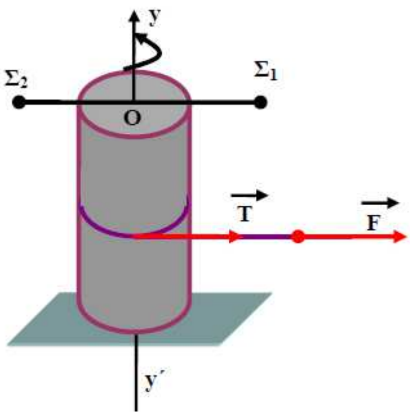
iii) Το πλήθος των στροφών που έχει κάμει μια ακτίνα του κυλίνδρου από t = 0 μέχρι την χρονική στιγμή t_1.

iv) Το μέτρο F της δύναμης.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς τον άξονά του υπολογίζεται με τη σχέση

$I_{cm} = ½MR^2$.

Απάντηση



i) Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K = \frac{1}{2} I_{ολ}\, \omega^2$ (1).

Από η σχέση (1) προκύπτει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2}\, I_{ολ}\omega \frac{d\omega}{dt} \quad ή \quad \frac{dK}{dt} = I_{ολ}\omega\alpha_\gamma \quad (2).$$

Στον κύλινδρο ασκείται μέσω του νήματος εφαπτομενικά η τάση $\vec{T}$, η ροπή της οποίας $\vec{\tau}_{T,y'y}$ ως προς τον κατακόρυφο άξονα $y'y$, έχει μέτρο $\tau_{T,y'y} = TR$.

Τα βάρη των σφαιριδίων είναι παράλληλα στον άξονα περιστροφής άρα δεν δημιουργούν ροπή ως προς αυτόν, ομοίως και το βάρος του κυλίνδρου επειδή βρίσκεται πάνω στον άξονα,

άρα $\Sigma\tau_{y'y} = TR$ ή $I_{ολ}\alpha_\gamma = TR$ (3).

Το νήμα δίνεται αβαρές άρα T = F, οπότε $\tau_{T,y'y} = FR$ (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε για τη γωνιακή επιτάχυνση τη σχέση $\alpha_\gamma = \dfrac{FR}{I_{o\lambda}}$, από την οποία προκύπτει ότι επειδή τα μεγέθη F, R, $I_{o\lambda}$ είναι σταθερά θα είναι και η γωνιακή επιτάχυνση σταθερή. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$\alpha_\gamma = \dfrac{\omega_1 - \omega_o}{t_1 - 0}$ (5). Η (2) με βάση την (5) για τη χρονική στιγμή t_1 γράφεται : $\dfrac{dK_1}{dt} = I_{o\lambda}\omega_1\alpha_\gamma$ (6).

Αλλά $I_{o\lambda}= \dfrac{1}{2}MR^2 + 2m(2R)^2$ και μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις $I_{o\lambda}$ =1,5 kgm^2 (7)

Από τις (5), (6) , (7) προκύπτει μετά τις πράξεις $\omega_1^2 - 2\omega_1 - 80 = 0$ οπότε

$$\omega_1 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4+320}}{2} \text{ και } \omega_1 = 10\,\text{rad/s ή } \omega_1 = -8\,\text{rad/s}.$$

Η τιμή $\omega_1 = -8\,\text{rad/s}$ δεν είναι αποδεκτή διότι η φορά περιστροφής του συστήματος παραμένει σταθερή, άρα πρέπει κάθε χρονική στιγμή η γωνιακή του ταχύτητα να διατηρεί σταθερό πρόσημο, ίδιο με το πρόσημο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

Αντικαθιστώντας την αποδεκτή τιμή $\omega_1 = 10\,\text{rad/s}$ στην (1) και με βάση την (7) προκύπτει

$$K_1 = 75\,j \text{ (8).}$$

ii) Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) έχουμε : $K_o + W_F = K_1$ ή $W_F = K_1 - K_o$ (9)

Όπου $K_o = \dfrac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_o^2$ από την οποία με βάση την (7) και τα δεδομένα προκύπτει K_o = 3j (10)

Έτσι από την (9) με βάση τις (8) , (10) προκύπτει W_F = 3j.

iii) Το πλήθος των στροφών που διαγράφει μια ακτίνα του κυλίνδρου είναι $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$ (11) όπου

$\theta = \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$ και μετά τις πράξεις θ_1 = 24 rad οπότε με βάση την (11) το πλήθος των στροφών που θα έχει διαγράψει μια ακτίνα του κυλίνδρου από t = 0 μέχρι $t = t_1$ = 4s είναι $N_1 = 12/\pi$.

iv) Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $F = I_{o\lambda}\alpha_\gamma/R$

και μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις F = 6N.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης