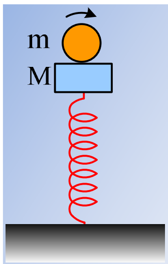
Ταλάντωση με σφαίρα που περιστρέφεται



Στο πάνω μέρος κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθερά K=100N/m δένουμε ένα λείο κύβο μάζας M=1Kgκαι το σύστημα ισορροπεί κατακόρυφα. Δίνουμε σε μία λεία σφαίρα μάζας m=3Kg και ακτίνας R= 0,1m αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0=10r/s έτσι ώστε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας να είναι παράλληλο με το έδαφος και τη στιγμή t=0 αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο σώμα μάζας M έτσι ώστε το κέντρο της σφαίρας να βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη που περνά από τον άξονα του ελατηρίου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Να βρεθούν:

Α)Το είδος της κίνησης της σφαίρας

Β)Η μέγιστη δύναμη που θα ασκεί το ελατήριο στον κύβο στην διάρκεια της κίνησης του συστήματος

Γ)Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος

Δ)Η εξίσωση του μέτρου της ταχύτητας του ανώτερου σημείου της σφαίρας καθώς και των σημείων που βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας και απέχουν από το πάνω μέρος του κύβου απόσταση R σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για την σφαίρα δίνεται Icm=0,4mR^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

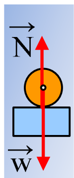
Α)Επειδή η σφαίρα και ο κύβος έχουν λείες επιφάνειες δεν θα ασκηθεί μεταξύ τους καμία οριζόντια δύναμη. Άρα η σφαίρα θα εκτελεί συνεχώς ομαλή στροφική κίνηση μιας και το Στ=0 για τη σφαίρα. Επειδή όμως θα αλλάξει η μάζα του συστήματος στον κατακόρυφο άξονα το σύστημα θα εκτελεί γ.α.τ. Από την αρχική και τελική ισορροπία για τον κατακόρυφο άξονα θα έχουμε:

Mg=Kx$_1$θα έχουμε x$_1$=0,1m (M+m)g=Kx$_2$θα έχουμε x$_2$=0,4m

Τη στιγμή t=0 που αφήνουμε τη σφαίρα πάνω στο κύβο το σύστημα δεν έχει ταχύτητα στον κατακόρυφο άξονα .Ετσι το σύστημα θα βρίσκεται στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος θα είναι A=x$_2$-x$_1$=0,3m.

Για να καθορίσουμε πλήρως την κίνηση του συστήματος θα πρέπει να εξετάσουμε και την περίπτωση αν η σφαίρα θα μπορούσε να χάσει την επαφή της με τον κύβο.

Ετσι με τη βοήθεια του σχήματος και του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε



$$N-mg=ma \rightarrow N=mg-m\omega^2x$$

η επαφή δεν θα χάνεται μόνο στην περίπτωση όπου N>0. Κάνοντας τις πράξεις θα βρούμε ότι για να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων θα έπρεπε x>0,4m που όμως δεν μπορεί να συμβεί γιατί το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος είναι A=0,3m.

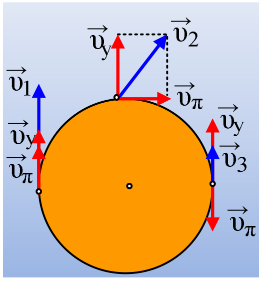
Ετσι τελικά κέντρο μάζας του κύβου εκτελεί γ.α.τ.με πλάτος A=0,3m ενώ η σφαίρα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί και αυτό γ.α.τ. με πλάτος A=0,3m.

Β)Η δύναμη του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $F_{ελ}=K.x_{ελ}$ (1) όπου χελ η απομάκρυνση από τη ΘΦΜΕ. Το ελατήριο θα συσπειρωθεί μέγιστα όταν το σύστημα φτάσει στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του δηλαδή στην ΘΕΑ. Εκεί το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $x_{ελmax}=x_2+A=0{,}7m$ και με την βοήθεια της σχέσης (1) $F_{ελmax}=70N$

Γ)Το σύστημα εκτελεί μεταφορική αλλά και στροφική κίνηση. Την μέγιστη κινητική ενέργεια το σύστημα θα την έχει όταν η μεταφορική του ενέργεια γίνει μέγιστη μιας και η στροφική του κατάσταση δεν μεταβάλλεται.

$$\text{Αρα } K_{\max}=\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_{\max}^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2=5{,}1J$$

Δ)Όλα τα σημεία της σφαίρας έχουν ταυτόχρονα δύο ταχύτητες. Μία κατακόρυφη εξαιτίας της ταλάντωσης με εξίσωση $\upsilon_\psi=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi o)=1{,}5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)$ (SI)
και μία εξαιτίας της περιστροφής της σφαίρας $\upsilon_{περ}=\omega R=1m/s$.



Ετσι τα μέτρα των ταχυτήτων θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$\upsilon_1=|1+1{,}5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)|$ $\quad \upsilon_2=\sqrt{1+2{,}25\sigma\upsilon\nu^2\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)}$ $\quad \upsilon_3=|1{,}5\sigma\upsilon\nu(5t+\pi/2)-1|$ (S.I.)

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Χρήστος Ελευθερίου