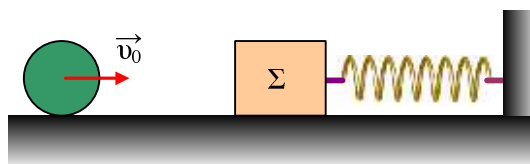


### Μια κρούση σφαίρας και αυτή.... η τριβή....



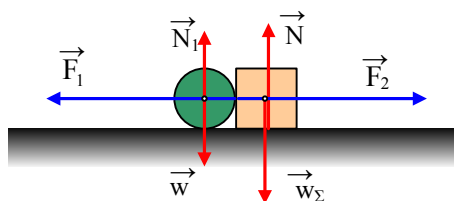
Ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $M=20\text{kg}$  ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής  $\mu=\mu_s=0,075$ , δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k=50\text{N/m}$  που έχει το φυσικό του μήκος. Μια σφαίρα μάζας  $m_1=10\text{kg}$  και διαμέτρου  $2R=h$ , όπου  $h$  το ύψος του σώματος  $\Sigma$ , η οποία δεν παρουσιάζει τριβή με το επίπεδο, κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα κέντρου μάζας  $v_0=1,5\text{m/s}$  και με κατεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα  $\Sigma$ . Στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται δύναμη τριβής μεταξύ σφαίρας και σώματος  $\Sigma$ .

- i) Πόσο τοις εκατό μειώνεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω κρούσης;
- ii) Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, μέχρι τη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος  $\Sigma$ ;
- iii) Πόσο συνολικά διάστημα θα διανύσει το σώμα  $\Sigma$  μέχρι να σταματήσει και ποια τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του στην θέση που σταματά;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της  $I = \frac{2}{5} m_1 \cdot R^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα σφαίρα - σώμα  $\Sigma$  στη διάρκεια της κρούσης. Με μπλε χρώμα είναι οι εσωτερικές και με κόκκινο οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος.



- i) Για την κρούση ισχύουν:

A) Η αρχή διατήρησης της ορμής ( $\Sigma F_{εξ}=0$ ):

$$\vec{P}_{\text{πριν}} = \vec{P}_{\text{μετά}} \rightarrow$$

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1' + M V \quad (1)$$

B) Η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής της σφαίρας:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}}$$

$$I \cdot \omega_0 + 0 = I \cdot \omega_1 \rightarrow \omega_1 = \omega_0 = \frac{v_0}{R} \quad (2)$$

Γ) Αφού η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια πριν την κρούση είναι ίση με αυτήν μετά την κρούση:

$$K_{\text{πριν}} = K_{\text{μετά}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} M V^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M V^2 \quad (3)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3) μας δίνει τις γνωστές μας σχέσεις:

$$v_1 = \frac{m_1 - M}{m_1 + M} v_0 \quad \text{και} \quad V = \frac{2m_1}{m_1 + M} v_0$$

Και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$v_1 = -0,5 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad V = 1 \text{ m/s}$$

Δηλαδή η σφαίρα κινείται προς τ' αριστερά με ταχύτητα κέντρου μάζας μέτρου 0,5m/s, ενώ συνεχίζει να στρέφεται δεξιόστροφα με γωνιακή ταχύτητα όση είχε και πριν την κρούση.

Το ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι:

$$\pi = \frac{K_a - K_\tau}{K_a} 100\% \rightarrow$$

$$\pi = \frac{K_a - K_\tau}{K_a} 100\% = \left(1 - \frac{K_\tau}{K_a}\right) 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2}\right) 100\% \quad (4)$$

Αλλά η περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι:

$$K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m_1 R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{5} m_1 v_0^2$$

Και η σχέση (4) γίνεται:

$$\pi = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{5} m_1 v_0^2}{\frac{7}{10} m_1 v_0^2}\right) 100\%$$

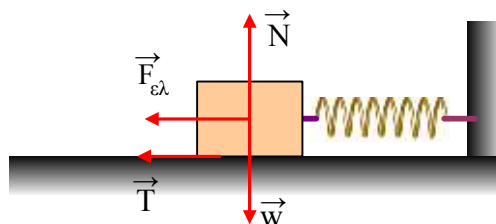
και με αντικατάσταση  $\pi = 63,5\%$

ii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ μετά την κρούση φαίνονται στο σχήμα. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι την μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος και έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_N + W_{\text{Fελ}} + W_T \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} M V^2 = -\frac{1}{2} k x_1^2 - T \cdot x_1 \quad (5)$$

όπου  $x_1$  η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, ενώ  $T = \mu \cdot N = \mu M g$  και με αντικατάσταση  $T = 15 \text{ N}$ , οπότε



με αντικατάσταση στην (5) παίρνουμε  $x_1 = 0,4\text{m}$ .

iii) Έστω το σώμα κινούμενο προς τα αριστερά σταματά σε απόσταση  $x$  από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου διανύοντας απόσταση  $s = x_1 - x$ .

(Η θέση αυτή είναι δεξιά της αρχικής θέσης ισορροπίας και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά  $x$ . Γιατί; Στην μέγιστη συσπείρωση το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια  $U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k x_1^2 = 4\text{J}$ , ενώ αν θα έφτανε μέχρι τη θέση φυσικού μήκους, η θερμότητα που θα παρήγετο εξαιτίας της τριβής θα ήταν  $Q = |W_T| = T \cdot x_1 = 6\text{J}$ , πράγμα φυσικά αδύνατον).

Εφαρμόζουμε ξανά το ΘΜΚΕ από την προηγούμενη θέση όπου το σώμα είχε σταματήσει στιγμιαία, μέχρι την θέση που σταματά τελικά και έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_N + W_{F_{ελ}} + W_T \rightarrow$$

$$0 - 0 = \left( \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) - T \cdot (x_1 - x)$$

και με αντικατάσταση:

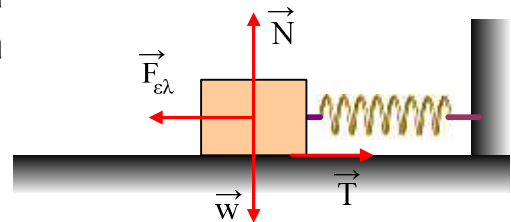
$$25x^2 - 15x + 2 = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε ή  $x = 0,4\text{m}$  ή  $x = 0,2\text{m}$

Άρα το σώμα θα σταματήσει αφού μετακινηθεί προς τ' αριστερά, από την θέση μέγιστης συσπείρωσης, κατά  $s = x_1 - x = 0,2\text{m}$ .

Στην θέση αυτή το σώμα, στον οριζόντιο άξονα, δέχεται την δύναμη από το ελατήριο με μέτρο  $F_{ελ} = kx = 10\text{N}$  και φορά προς τα αριστερά και την τριβή, προς τα δεξιά και μέτρο  $T_s = 10\text{N}$ , αφού το σώμα ισορροπεί και  $\Sigma F = 0$ . Η ασκούμενη δηλαδή τριβή είναι πλέον στατική.

Άρα η συνολική απόσταση που διανύει το σώμα είναι  $s_{ολ} = x_1 + s = 0,6\text{m}$ .



**Σχόλιο:** Σχνά το τελευταίο ερώτημα αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι την τελική, όπου σαν τελική θέση παίρνεται αυτή όπου:

$$F_{ελ} = T_{op} \rightarrow k \cdot \Delta = \mu mg$$

Από εκεί και πέρα έχουμε: Το έργο της δύναμης του ελατηρίου, που είναι συντηρητική δύναμη, οπότε  $W_{F_{ελ}} = 0 - \frac{1}{2} k \Delta^2$ , ενώ το έργο της τριβής, μιας μη συντηρητικής δύναμης είναι  $W_T = -T \cdot s_{ολ}$ .

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι η τελική θέση που θα σταματήσει το σώμα δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή... και συνεπώς μια τέτοια αντιμετώπιση δεν είναι ορθή.

### Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

*Διονύσης Μάργαρης*