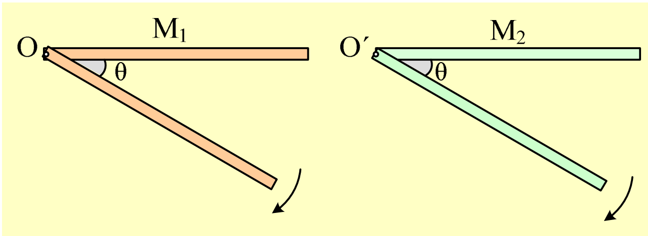
3. Γενικές Ερωτήσεις με δικαιολόγηση

1) **Χρόνος περιστροφής ράβδων.**

Δύο ομογενείς ράβδοι ίδιου μήκους αλλά διαφορετικών μαζών $M_2>M_1$, μπορούν να στρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα τους άκρο, χωρίς τριβές. Οι ράβδοι αφήνονται ταυτόχρονα να κινηθούν από την οριζόντια θέση.



Αναφερόμενοι στις θέσεις που οι ράβδοι σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση:

i) Για τις γωνιακές ταχύτητες των δύο ράβδων ισχύει:

α) $\omega_1<\omega_2$ β) $\omega_1=\omega_2$ γ) $\omega_1 > \omega_2$

ii) Για τις γωνιακές επιταχύνσεις των δύο ράβδων ισχύει:

α) $\alpha_{\gamma 1}< \alpha_{\gamma 2}$ β) $\alpha_{\gamma 1}=\alpha_{\gamma 2}$ γ) $\alpha_{\gamma 1} >\alpha_{\gamma 2}$

iii) Στη θέση αυτή θα φτάσει πιο γρήγορα:

α) Η πρώτη ράβδος, β) η δεύτερη ράβδος γ) θα φτάσουν ταυτόχρονα.

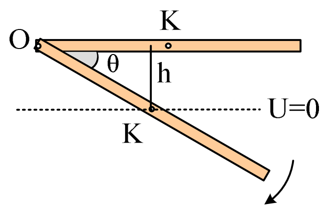
iv) Κατά τη διάρκεια της κίνησης των ράβδων, μεγαλύτερη στροφορμή ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής τους, θα αποκτήσει:

α) Η πρώτη ράβδος, β) η δεύτερη ράβδος γ) θα αποκτήσουν ίσες στροφορμές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το άκρο της $I= 1/3\ M\ell^2$.

Απάντηση:

i) Έστω μια ράβδος η οποία αφήνεται να περιστραφεί από την αρχική θέση και μετά από λίγο σχηματίζει με την οριζόντια θέση γωνία θ, οπότε το κέντρο μάζας της έχει κατέλθει κατά $h=\frac{\ell}{2}\cdot \eta\mu\theta$. Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των δύο θέσεων και θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια της ράβδου στην τελική θέση έχουμε:



$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \quad ή$$

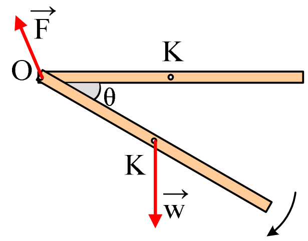
$$0+Mgh = ½\ I\cdot\omega^2 \quad ή$$

$$Mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 \quad ή$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cdot\eta\mu\theta}{\ell}} \quad (1)$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα δεν εξαρτάται από τη μάζα της ράβδου, συνεπώς οι δυο ράβδοι θα αποκτήσουν ίσες γωνιακές ταχύτητες. Σωστή απάντηση το β).

ii) Έστω σε μια στιγμή η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνσή της. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$Mg\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\theta$$

Παρατηρούμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση μιας ράβδου ορισμένου μήκους, είναι ανεξάρτητη της μάζας, συνεπώς σωστή πρόταση είναι η β)

iii) Η κίνηση βέβαια δεν είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς τύπους για τη γωνία που διαγράφει μια ράβδος. Με βάση όμως τα προηγούμενα οι δύο ράβδοι σε κάθε θέση έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες και ίσες γωνιακές επιταχύνσεις, συνεπώς στο ίδιο χρονικό διάστημα θα διαγράφουν και ίσες γωνίες. Άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στις θέσεις που φαίνεται στο σχήμα όπου σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Σωστή γ).

iv) Από την σχέση (1) παρατηρούμε ότι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα προκύπτει όταν θ=90°, όπου:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}\ .$$

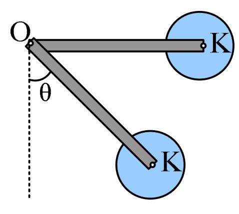
Συνεπώς οι δυο ράβδοι θα φτάσουν ταυτόχρονα στην κατακόρυφη θέση με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά

$$L = I\cdot\omega = \frac{1}{3}M\ell^2\omega^2$$

Συνεπώς η δεύτερη ράβδος που έχει μεγαλύτερη μάζα, θα έχει και μεγαλύτερη στροφορμή. Σωστή πρόταση η β).

2) **Μια σφαίρα στο άκρο ράβδου.**

Μια σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R είναι προσδεδεμένη με αβαρή ράβδο μήκους ℓ=4R, όπως στο σχήμα (η σφαίρα έχει τρυπηθεί και το άκρο της ράβδου φτάνει στο κέντρο της σφαίρας Κ). Το άλλο άκρο Ο της ράβδου μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, χωρίς τριβές. Φέρνουμε τη σφαίρα σε τέτοια θέση ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και την αφήνουμε να κινηθεί. Για τη θέση που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ:



i) Η επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου Κ της ράβδου έχει μέτρο:

α) $\alpha <$ g·ημθ β) $\alpha =$ g·ημθ γ) $\alpha >$ g·ημθ

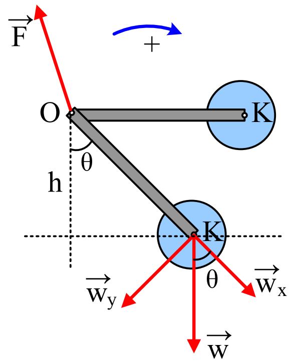
ii) Η ταχύτητα του κέντρου Κ της ράβδου έχει μέτρο

α) $\upsilon < \sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$ β) $\upsilon = \sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$ γ) $\upsilon > \sqrt{8Rg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$

Για τη σφαίρα I_{cm}=0,4 mR^2.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό (σφαίρα-ράβδος). Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση:



$$Στ=I\cdot α_{γων}$$

Αλλά $I_o=I_{cm}+m\ell^2 = \frac{2}{5}mR^2 + m(4R)^2 = \frac{82}{5}mR^2$ οπότε:

$$mgημθ\cdot\ell = I_o\cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$mg\cdot ημθ\cdot 4R=\frac{82}{5}mR^2\cdot a_{γων} \text{ ή}$$

$$α_K=α_{γων}\cdot 4R=\frac{40}{41}g\cdot ημθ < g\cdot ημθ$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ, ανάμεσα στην οριζόντια θέση και στη θέση που η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από την χαμηλότερη θέση του κέντρου της σφαίρας Κ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ} \text{ ή}$$

$$mgh = ½\, I_o\cdot ω^2 \text{ ή}$$

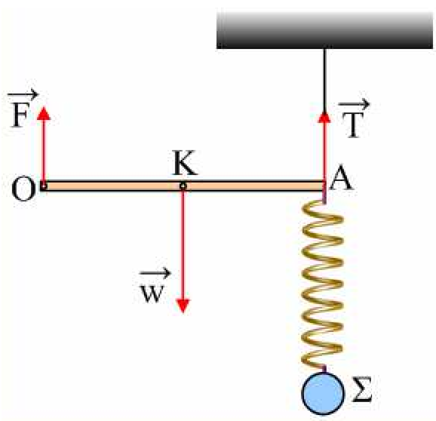
$$mg\cdot 4R\cdot συνθ = \frac{1}{2}\cdot\frac{82}{5}mR^2\cdot ω^2 \text{ ή } ω=\sqrt{\frac{20}{41}\frac{gσυνθ}{R}} \text{ ή}$$

$$υ_K=\sqrt{\frac{320}{41}\cdot Rgσυνθ}<\sqrt{8Rg\cdot συνθ}$$

Σωστή η α) πρόταση.

3) **Ερώτηση θεωρίας σε ένα σύστημα.**

Η ομογενής σανίδα ΟΑ μήκους ℓ και μάζας Μ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο του Ο, ισορροπεί δε σε οριζόντια θέση, δεμένη στο άλλο της άκρο Α, με κατακόρυφο νήμα όπως στο σχήμα. Εξάλλου η σφαίρα Σ ηρεμεί στο κάτω άκρο του ελατηρίου επιμηκύνοντάς το κατά $\Delta\ell=0{,}2m$. Εκτρέπουμε προς τα κάτω τη σφαίρα Σ κατά 0,2m και την αφήνουμε να ταλαντωθεί.



Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

Α) i) Η τάση του νήματος Τ είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη του ελατηρίου.

ii) Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα είναι κατακόρυφη όπως έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.

iii) Η μέγιστη τιμή της τάσης του νήματος είναι μεγαλύτερη από 2mg.

B) Τη χρονική στιγμή t_0 που η σφαίρα Σ βρίσκεται στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής της, κόβουμε το νήμα, από το οποίο κρέμεται η ράβδος στο σημείο Α. Αμέσως μετά:

i) Η σφαίρα Σ έχει επιτάχυνση α=g, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

ii) Η επιτάχυνση του άκρου Α είναι ίση με την επιτάχυνση της σφαίρας.

iii) Η επιτάχυνση της σφαίρας Σ συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου με τη σχέση $\alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell$.

iv) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου υπολογίζεται από την εξίσωση:

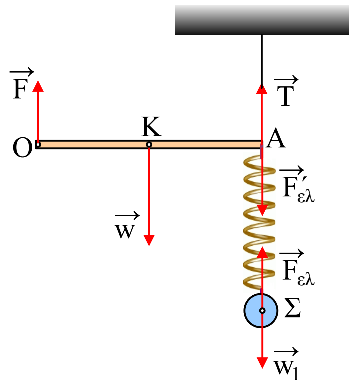
$$Mg\ell/2 + mg\ell = 1/3\, M\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}.$$

v) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου έχει μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu}=3g/2\ell$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Κ $I=M\ell^2/12$.

Απάντηση:

Α) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στη σφαίρα. Προφανώς για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο ισχύει $F_{\varepsilon\lambda}=F_{\varepsilon\lambda}'=k\Delta\ell$



Από τη συνθήκη ισορροπίας της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow \Sigma F_x=0$$

Αφού όμως όλες οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι κατακόρυφες και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκεί ο άξονας, θα είναι μηδενική.

Εξάλλου:

$$\Sigma\tau_o=0 \text{ ή}$$

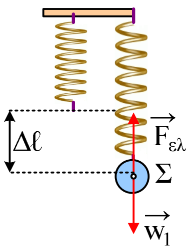
$$Mg\cdot\ell/2+F_{\varepsilon\lambda}'\cdot\ell-T\cdot\ell=0 \text{ ή}$$

$$T= ½\, Mg + F_{\varepsilon\lambda}' \quad (1)$$

Μελετάμε την κίνηση της σφαίρας. Στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \text{ ή}$$

$$K\cdot\Delta\ell=mg$$



Αλλά αφού εκτρέπουμε τη σφαίρα κατά 0,2m, όσο είναι και η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας, τότε στην κατώτερη θέση η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο 2mg ενώ η ανώτερη θέση συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους και δεν ασκείται δύναμη από το ελατήριο στη σφαίρα.

Με βάση τα παραπάνω η μέγιστη τιμή της τάσης του νήματος, υπολογίζεται από τη σχέση (1) $T_{max}= ½\, Mg+2mg$. Έτσι οι απαντήσεις είναι:

i) Η τάση του νήματος Τ είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη του ελατηρίου. **Λ.**

ii) Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα είναι κατακόρυφη όπως έχει σχεδιαστεί στο σχήμα. **Σ.**

iii) Η μέγιστη τιμή της τάσης του νήματος είναι μεγαλύτερη από 2mg. **Σ.**

Β) Τη στιγμή που κόβουμε το νήμα, η σφαίρα βρίσκεται στην ανώτερη θέση της τροχιάς της, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, οπότε δεν ασκεί δύναμη ούτε στη σφαίρα, ούτε στη ράβδο. Έτσι η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι το βάρος της και αποκτά επιτάχυνση g, ενώ για τη ράβδο θα έχουμε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$Mg\cdot\ell/2 = (M\ell^2/12 + Mg\cdot\ell^2/4)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}$$

Ενώ η επιτρόχια επιτάχυνση του άκρου Α είναι ίση με $\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell = 1{,}5g$.

Οπότε οι απαντήσεις είναι:

i) Η σφαίρα Σ έχει επιτάχυνση α=g, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. **Σ.**

ii) Η επιτάχυνση του άκρου Α είναι ίση με την επιτάχυνση της σφαίρας. **Λ.**

iii) Η επιτάχυνση της σφαίρας Σ συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου με τη σχέση $\alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell$. **Λ.**

iv) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$Mg\ell/2 + mg\ell = 1/3\, M\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}.$$ **Λ.**

v) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου έχει μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 3g/2\ell$.**Σ.**

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης