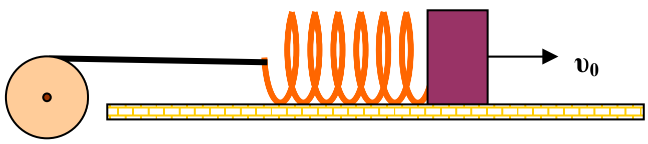
Τροχαλία - σώμα - ελατήριο

Στη διάταξη του σχήματος εικονίζεται μια τροχαλία μάζας Μ, η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδό της, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της. Το σώμα Σ έχει μάζα m και είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k. Το άλλο άκρο του ελατηρίου με μη εκτατό αβαρές νήμα τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Στην αρχή όλα τα σώματα της διάταξης είναι ακίνητα και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Δίνουμε μια αρχική ταχύτητα υ_0 στο σώμα προς τα δεξιά.

Αν η κίνηση του σώματος γίνεται χωρίς τριβές να υπολογιστούν:



α) Η ταχύτητα του σώματος την στιγμή που η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μέγιστη.

β) Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου

γ) Η ταχύτητα του σώματος και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την στιγμή που το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό του μήκος.

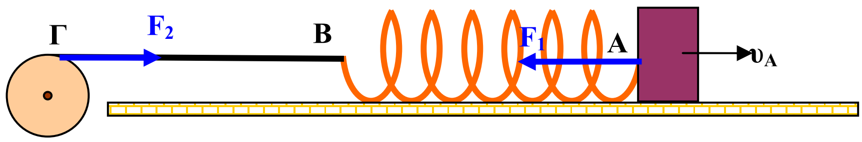
δ) Υπό ποία συνθήκη το σώμα θα επιστρέψει στην αρχική του θέση;

ε) Αν ικανοποιείται η συνθήκη του ερωτήματος δ, με πόση ταχύτητα θα επιστρέψει το σώμα στην αρχική του θέση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Απάντηση:



α) Καθώς το σώμα κινείται, το νήμα ξετυλίγεται και η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται. Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό η ταχύτητα του πίσω άκρου Β του ελατηρίου είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Γ του νήματος που είναι σε επαφή με την τροχαλία. Επειδή δε το νήμα είναι τυλιγμένο στην τροχαλία δεν ολισθαίνει επ' αυτής, με αποτέλεσμα το σημείο Γ του νήματος να έχει την ίδια ταχύτητα με το αντίστοιχο σημείο της τροχαλίας. Συνεπώς η ταχύτητα του σημείου Β είναι ίση κατά μέτρο με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της τροχαλίας. Άρα $\upsilon_B=\omega R$.

Στην αρχή $\upsilon_A>\upsilon_B$ με αποτέλεσμα το μήκος του ελατηρίου να αυξάνεται.

Η δύναμη F_1 που ασκεί το ελατήριο στο σώμα έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ταχύτητας του σώματος. Η ροπή της δύναμης F_2 που ασκεί το νήμα στην τροχαλία έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας και ως εκ τούτου την αύξηση της ταχύτητας του σημείου Β.

Κάποια στιγμή η ταχύτητα του σημείου Α εξισώνεται με την ταχύτητα του σημείου Β. Από την στιγμή αυτή και μετά η ταχύτητα του σημείου Β γίνεται μεγαλύτερη από την ταχύτητα του σημείου Α με αποτέλεσμα το μήκος του ελατηρίου να αρχίσει να μειώνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι **το ελατήριο έχει την μέγιστη επιμήκυνση όταν η ταχύτητες των σημείων Α και Β είναι ίσες.** Την στιγμή αυτή

$$\upsilon_A=\upsilon_B \Rightarrow \upsilon_A=\omega R. \quad (1)$$

Επειδή στο σύστημα τροχαλία – σώμα – ελατήριο δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα της τροχαλίας, η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα της τροχαλίας παραμένει σταθερή.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής μεταξύ της αρχικής κατάστασης του συστήματος και της στιγμής που η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μέγιστη έχουμε:

$$m\upsilon_0 R = m\upsilon R + I\omega \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) εύκολα προκύπτει ότι

$$\upsilon = \upsilon_0 \frac{mR^2}{I+mR^2} \quad (3\alpha)$$

$$\omega = \upsilon_0 \frac{mR}{I+mR^2} \quad (3\beta)$$

β) Επειδή η κίνηση γίνεται χωρίς απώλειες ενέργειας η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των ίδιων στιγμών έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3) στην (4) έχουμε:ℓ

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \frac{I}{I+mR^2} \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \frac{I}{I+mR^2} \Rightarrow \Delta\ell = \upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}\frac{I}{I+mR^2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell = \upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}\frac{M}{M+2m}} \quad (5)$$

γ) Όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος η τροχαλία θα έχει μια γωνιακή ταχύτητα ω και το σώμα μια ταχύτητα υ. Μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης εφαρμόζονται η αρχή διατήρησης της στροφορμής και το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$m\upsilon_0 R = m\upsilon R + I\omega \Rightarrow m(\upsilon_0 - \upsilon)R = I\omega \quad (6\alpha)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow m(\upsilon_0-\upsilon)(\upsilon_0+\upsilon) = I\omega^2 \quad (6\beta)$$

Επειδή $\omega \neq 0$, έχουμε από την (6α) ότι $\upsilon_0 - \upsilon \neq 0$.

Διαιρώντας τις σχέσεις (6α) και (6β) κατά μέλη έχουμε:

$$\upsilon_0 + \upsilon = \omega R \quad (6\gamma)$$

Λύνοντας το σύστημα των (6α) και (6γ) ως προς υ, ω έχουμε:

$$\omega = \frac{2m\upsilon_0 R}{I + mR^2} = \frac{4m\upsilon_0}{R(M+2m)} \qquad (7\alpha)$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0(2m - M)}{2m + M} \qquad (7\beta)$$

δ) Για να επιστρέψει το σώμα στην αρχική του θέση πρέπει $\upsilon < 0 \Leftrightarrow m < \frac{M}{2}$. (8)

ε) Αν ικανοποιείται η συνθήκη (8) τότε το σώμα αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά. Επειδή η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας δεν αλλάζει φορά, το νήμα χαλαρώνει με αποτέλεσμα να μη ασκείται δύναμη ούτε στο σώμα ούτε στην τροχαλία. Συνεπώς η ταχύτητα με ην οποία το σώμα επιστρέφει στην αρχική του θέση δίνεται από την σχέση (7β).

<u>Σχόλιο</u>

Έστω ότι $m > \frac{M}{2} \Rightarrow \upsilon > 0$. Επομένως ο σώμα συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά.

Από την σχέση (6γ) έχουμε ότι ωR>υ. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση το νήμα θα χαλαρώσει με αποτέλεσμα η τροχαλία να συνεχίσει να στρέφεται με την γωνιακή ταχύτητα που προκύπτει από την σχέση (7α) και το σώμα να κινείται με την ταχύτητα που προκύπτει από την σχέση (7β).

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης