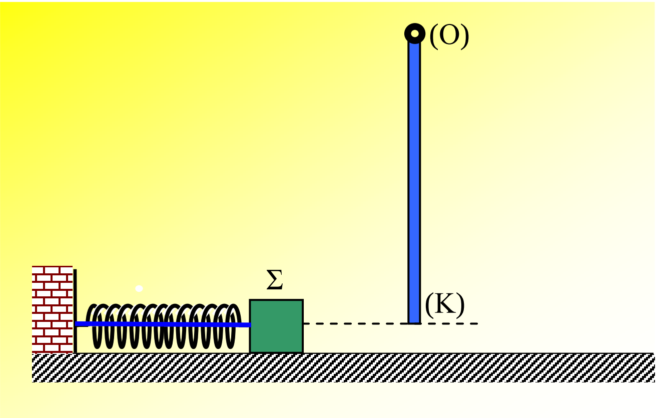
Ταλάντωση- Κρούση- Στερεό



Σώμα Σ μάζας ***m=1kg*** είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς ***k=400N/m***, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα με τη βοήθεια νήματος ισορροπεί και η τάση του νήματος έχει μέτρο ***200N***. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα αρχίζει να κινείται. . Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου συγκρούεται ελαστικά με το κάτω άκρο Κ λεπτής και ομογενούς ράβδου, το οποίο βρίσκεται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου. Η ράβδος μάζας ***M=2kg*** και μήκους ***L=1,2m*** έχει το άλλο άκρο της Ο στερεωμένο σε άρθρωση και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές.

Να υπολογίσετε:

α) Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ και να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης και την γωνιακή συχνότητα.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση

γ) Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

Για την ράβδο αμέσως μετά την κρούση, να υπολογίσετε:

δ) το μέτρο της δύναμης από τον άξονα περιστροφής αμέσως μετά την κρούση

ε) την μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής της ταχύτητας

στ) Να ελέγξετε εάν εκτελεί ανακύκλωση

Για την ταλάντωση του σώματος μετά την κρούση:

ζ) να γράψετε την χρονική εξίσωση απομάκρυνσης θεωρώντας ως t=0 τη στιγμή της κρούσης και θετική την φορά προς τα δεξιά.

η) Για την χρονική στιγμή $t=\frac{T}{12}$,όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση, να υπολογίσετε:

i) την στροφορμή του σώματος Σ κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου

ii) τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ κατά τον άξονα περιστροφής της ράβδου

iii) τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ελατηρίου

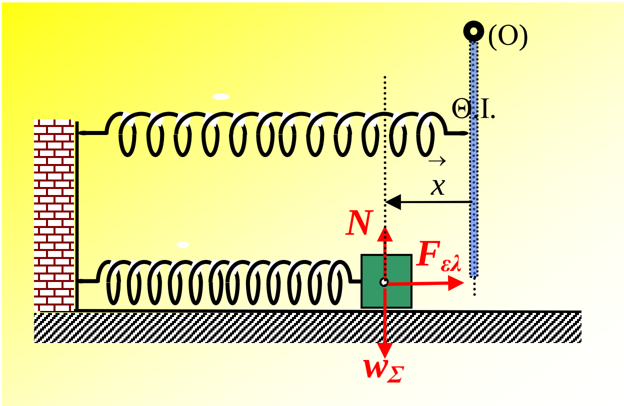
θ) την τιμή του λόγου $\frac{m}{M}$, ώστε να μεταφερθεί στην ράβδο το 100% της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ πριν την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο Ο: $I_{(O)}=\frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση:

α) Στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x από την Θ.Ι. που συμπίπτει με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου(οπότε $\vec{\Delta\ell}=\vec{x}$)ισχύει

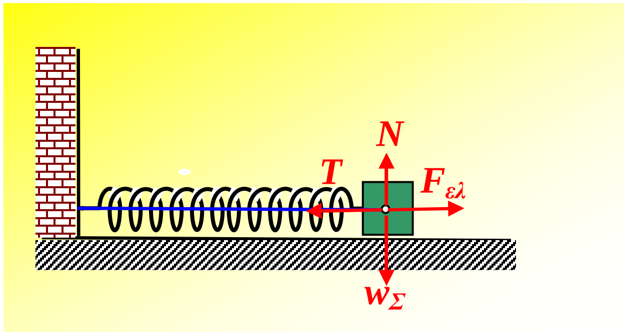
$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}_{\varepsilon\lambda}=-k\vec{\Delta\ell}=-k\vec{x}$$



Άρα το σώμα εκτελεί α.α.τ με σταθερά επαναφοράς D=k=400N/m

Για την αρχική ισορροπία του σώματος ισχύει:

$\Sigma F=0 \Rightarrow T=F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow T=k\cdot\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell=0{,}5m$



Το σώμα αρχίζει την ταλάντωση του από μία θέση με μηδενική ταχύτητα, οπότε η θέση αυτή θα αποτελεί μία ακραία θέση ταλάντωσης. Άρα η αρχική απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας του αντιστοιχεί στο πλάτος της ταλάντωσης. Έτσι:

$$\boldsymbol{A=\Delta\ell=0{,}5m}$$

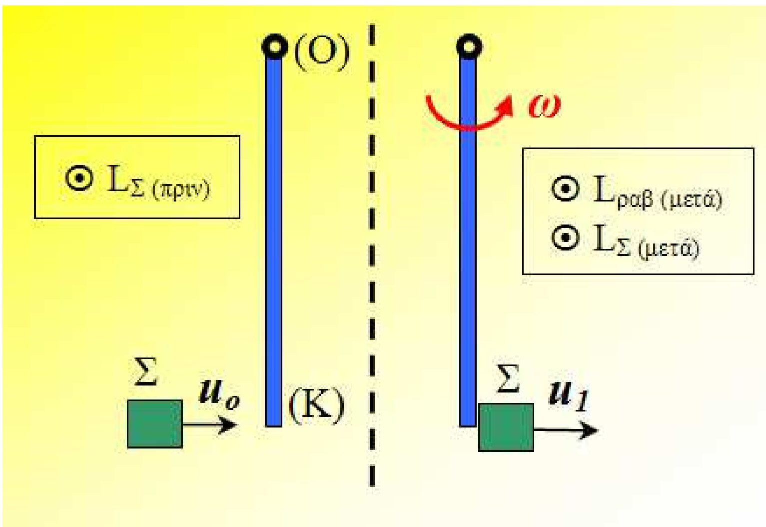
Για την γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ισχύει:

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{400}{1}} \Rightarrow \omega=20\ rad/s$$

β) Τη στιγμή της σύγκρουσης οι δυνάμεις επαφής μεταξύ σώματος και ράβδου έχουν μηδενική ολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής Ο, οπότε η συνολική στροφορμή ως προς τον άξονα αυτό διατηρείται.

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$mu_oL=\frac{1}{3}ML^2\cdot\omega+m\cdot u_1\cdot L \quad (1)$$



Επειδή η κρούση είναι ελαστική, θα διατηρείται σταθερή και η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση. Άρα θα ισχύει:

$$K_{αρχ} = K_{τελ}$$

$$\frac{1}{2}mu_o^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mu_1^2$$

$$\frac{1}{2}mu_o^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 \quad (2)$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$m(u_o - u_1) = \frac{1}{3}M\cdot L\cdot\omega \quad (3)$$

Ενώ από τη σχέση (2) παίρνουμε:

$$m(u_o^2 - u_1^2) = \frac{1}{3}M\cdot L^2\cdot\omega^2$$

$$m(u_o - u_1)(u_o + u_1) = \frac{1}{3}M\cdot L^2\cdot\omega^2 \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (4) και (3)

$$u_o + u_1 = L\cdot\omega \Rightarrow \omega = \frac{u_o + u_1}{L} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (6) βρίσκουμε:

$$m(u_o - u_1) = \frac{1}{3}M\cdot L\cdot\frac{u_o + u_1}{L}$$

$$\left(m + \frac{1}{3}M\right)u_1 = \left(m - \frac{1}{3}M\right)u_o$$

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{3m - M}{3m + M}u_o} \quad (6)$$

Επειδή η κρούση συμβαίνει στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, που συμπίπτει με την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, η ταχύτητα του σώματος ισούται με την μέγιστη ταχύτητα.

$$u_o = u_{max} = \omega\cdot A = 20\cdot 0{,}5 \Rightarrow u_o = 10m/s$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (6) βρίσκουμε:

$$u_1 = \frac{3\cdot 1 - 2}{3\cdot 1 + 2}u_o \Rightarrow \boldsymbol{u_1 = 2m/s}$$

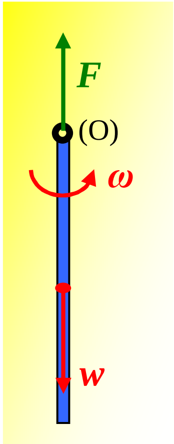
γ) Και με αντικατάσταση της (6) στην (5) προκύπτει:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{6m\cdot u_o}{(3m + M)\cdot L}}$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε:

$$\omega = \frac{6\cdot 1\cdot 10}{(3\cdot 1 + 2)\cdot 1{,}2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10rad/s}$$

δ) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στην κατακόρυφη θέση της είναι το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη από τον άξονα περιστροφής $\vec{F}$. Με εφαρμογή του Θεμελιώδους Νόμου Στροφικής παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I_{(O)} \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \tau_w + \tau_F = I_{(O)} \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = 0$$

Άρα και η επιτρόχιος επιτάχυνση για την κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου θα είναι

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_\gamma \cdot L/2 = 0$$

Επομένως στην κατακόρυφη θέση, η δύναμη από την άρθρωση δεν πρέπει να έχει οριζόντια συνιστώσα. Αυτό σημαίνει ότι η $\vec{F}$ θα είναι κατακόρυφη. Για την συνισταμένη των δυνάμεων στην ακτινική διεύθυνση θα ισχύει:

$$\Sigma F = M \cdot a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow F - Mg = M \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{2}$$

$$F = Mg + M \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{2} = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 100 \cdot 0{,}2$$

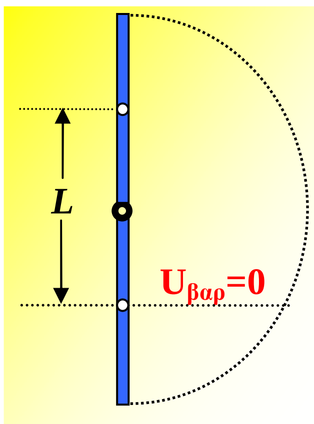
F=60N

ε) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας δηλαδή η γωνιακή επιτάχυνση μεγιστοποιείται όταν η ράβδος γίνει οριζόντια. Στην οριζόντια θέση της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)} \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{3} M \cdot L^2 \cdot a_\gamma$$

$$\alpha_\gamma = \frac{3g}{2L} = \frac{30}{2{,}4} \Rightarrow \boldsymbol{a_\gamma = 12{,}5 rad/s^2}$$

στ) Υποθέτουμε ότι η ράβδος εκτελεί ανακύκλωση. Υπολογίζουμε την κινητική της ενέργεια στην πάνω κατακόρυφη, εφαρμόζοντας και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται την κάτω κατακόρυφη θέση της(αμέσως μετά την κρούση).



$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + 0 = K_{\tau\varepsilon\lambda} + M \cdot g \cdot L$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ML^2 \cdot \omega^2 - MgL$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1{,}44 \cdot 100 - 2 \cdot 10 \cdot 1{,}2 = 48 - 24$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = 24J > 0$$

Άρα, η ράβδος εκτελεί ανακύκλωση.

ζ) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης παραμένει σταθερή.

Επειδή η κρούση πραγματοποιείται στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα, το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το σώμα αμέσως μετά την κρούση αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή της ταχύτητας για την ταλάντωση που θα πραγματοποιήσει αμέσως μετά. Επιπλέον η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης παραμένει σταθερή, δεδομένου ότι κατά την κρούση, δε μεταβάλλεται η μάζα του ταλαντωτή. Οπότε:

$$u_1 = u_{max}' = \omega \cdot A' \Rightarrow A' = \frac{u_1}{\omega_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{2}{20} = 01,m$$

Το σώμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται κατά την θετική φορά, οπότε η ταλάντωσή του δεν έχει αρχική φάση. Έτσι, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = A'\,\eta\mu\omega t \;\Rightarrow \boldsymbol{x=0{,}1\cdot\eta\mu 20t \quad (S.I.)}$$

η) Την χρονική στιγμή το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση

$$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(\omega \cdot \frac{T}{12}\right) = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12}\right) = 0{,}05m$$

του άξονα ταλάντωσης, και έχει ταχύτητα:

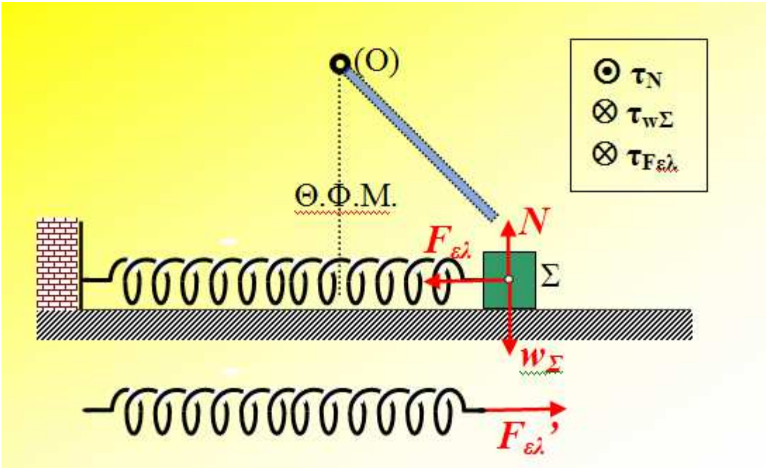
$$u = \omega \cdot A' \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega \cdot \frac{T}{12}\right) = 20 \cdot 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12}\right) = \sqrt{3} m/s$$

i) Η στροφορμή του σώματος Σ είναι:

$$L = m \cdot u \cdot L = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 1{,}2 \Rightarrow \boldsymbol{L = 1{,}2\sqrt{3}\,\frac{kg \cdot m^2}{s}}$$

ii) $\dfrac{dL_\Sigma}{dt} = \tau_w + \tau_N + \tau_{F\varepsilon\lambda} = \tau_{F\,\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} \cdot L = -k \cdot x \cdot L = -400 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}2$

$$\boldsymbol{\frac{dL_\Sigma}{dt} = -24\,\frac{kg \cdot m^2}{s}}$$



iii) Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε η στοιχειώδης μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου σε στοιχειώδη χρονική διάρκεια dt, κατά την οποία μπορεί να θεωρηθεί η δύναμη σταθερή:

$$dU_{\varepsilon\lambda} = -dW_{F\,\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot dx$$

Άρα:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F\,\varepsilon\lambda}}{dt} = -\left|\vec{F}_{\varepsilon\lambda}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = k\left|\vec{\Delta\ell}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|$$

Επειδή το ελατήριο είναι οριζόντιο και το σώμα ταλαντώνεται μόνο με τη δύναμη του ελατηρίου να παίζει ρόλο δύναμης επαναφοράς, η παραμόρφωση $\Delta\ell$ του ελατηρίου από την θέση φυσικού μήκους συμπίπτει με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας x, οπότε:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 400 \cdot 0{,}05 \cdot \sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = +20 \cdot \sqrt{3}\,\frac{J}{s}}$$

θ) Για να μεταφερθεί το 100% της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ πριν την κρούση στην ράβδο θα πρέπει u_1=0. Από την σχέση (6) προκύπτει:

$$3m - M = 0 \Rightarrow 3m = M \Rightarrow \boldsymbol{\frac{m}{M} = \frac{1}{3}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος