

Ταλάντωση τροχαλίας

Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά k . Η τροχαλία μάζας m παρουσιάζει μεγάλο συντελεστή τριβής με το μη εκτατό νήμα έτσι ώστε αυτό να μην ολισθαίνει σ' αυτήν. Από την τροχαλία κρέμεται σώμα μάζας M .

Αποδείξτε ότι το σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση και υπολογίσατε την περίοδο.

Απάντηση:

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω σχήμα.

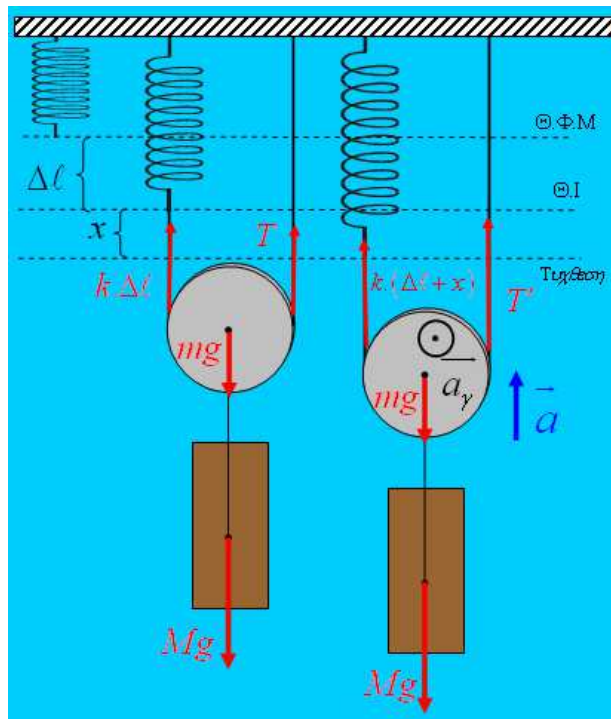
Στη θέση ισορροπίας έχουμε ότι :

$$\sum F = 0 \Rightarrow Mg + mg = k \cdot \Delta\ell + T \quad (1)$$

Η μη περιστροφή της τροχαλίας επιβάλλει:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow T \cdot R - k \cdot \Delta\ell \cdot R = 0 \Rightarrow T = k \cdot \Delta\ell \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2k \cdot \Delta\ell = Mg + mg \quad (3)$$



Θα πάμε κατόπιν σε μια τυχαία θέση στην οποία η επιτάχυνση έχει την σημειούμενη φορά. Η φορά αυτή είναι αναμενόμενη λόγω του ότι το τεντωμένο ελατήριο έλκει την τροχαλία.

Εκεί ισχύει ότι $\sum F = (m + M)a \Rightarrow$

$$T' + k \cdot (\Delta\ell + x) - Mg - mg = (m + M)a \Rightarrow T' + k \cdot \Delta\ell + k \cdot x - Mg - mg = (m + M)a \quad (4)$$

Για την στροφική κίνηση έχουμε ότι:

$$\sum \tau = I \cdot a_\gamma \Rightarrow k \cdot (\Delta\ell + x)R - T'R = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R} \Rightarrow k \cdot \Delta\ell + k \cdot x - T' = \frac{ma}{2} \quad (5)$$

Προσθέτοντας (4) και (5) θα έχουμε ότι:

$$2k \cdot \Delta \ell + 2k \cdot x - Mg - mg = \left(3 \frac{m}{2} + M\right) a \quad (6)$$

Από τις (6), (3) έχουμε ότι: $2k \cdot x = \left(3 \frac{m}{2} + M\right) a \Rightarrow k \cdot x = \left(3 \frac{m}{4} + \frac{M}{2}\right) a \Rightarrow a = \frac{k \cdot x}{3 \frac{m}{4} + \frac{M}{2}} \quad (7)$

Όμως το κέντρο της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατά $y = \frac{x}{2}$ μια και το ελατήριο επιμηκύνθηκε κατά x οπότε το συνολικό μήκος σχοινιού και ελατηρίου αυξήθηκε κατά x , επομένως κάθε σκέλος αυξήθηκε κατά

$$y = \frac{x}{2}.$$

$$(7) \Rightarrow a = \frac{2k \cdot y}{3 \frac{m}{4} + \frac{M}{2}}$$

Επειδή $|a| = \omega^2 |y| \Rightarrow \frac{|a|}{|y|} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{|a|}{|y|}} \Rightarrow \omega = \frac{2k}{3 \frac{m}{4} + \frac{M}{2}} \Rightarrow T = 2\pi \frac{3 \frac{m}{4} + \frac{M}{2}}{2k}$

Παρατήρηση:

Αν η μάζα της τροχαλίας είναι αμελητέα τότε $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \sqrt{\frac{4k}{M}}$

Είναι δηλαδή σαν να κρεμάσαμε στο ελατήριο σώμα με μάζα το ένα τέταρτο από αυτό που έχουμε.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος