

Σύνθεση ταλαντώσεων ή συγκεκριμένη τριγωνομετρία;

Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με περίοδο $T=4s$ και πλάτη $A_1=6cm$ και $A_2=2\sqrt{3} cm$. Τα σώματα αυτά συναντώνται κάποια χρονική στιγμή σε ένα σημείο M που απέχει $x_0=3cm$ από την κοινή θέση ισορροπίας τους. Την στιγμή της συνάντησης το πρώτο απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας και το δεύτερο κατευθύνεται προς αυτήν.

Να υπολογίσετε:

- α) Την μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων.
- β) Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την στιγμή της συνάντησής τους μέχρι η απόστασή τους να γίνει μέγιστη για πρώτη φορά
- γ) Την περίοδο των συναντήσεων τους και τις θέσεις συνάντησης.

1^η Λύση (απολύτως εντός διδακτέας ύλης)

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το M .

Θέτουμε $t_0=0$ ην αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή κατά την οποία το πρώτο σώμα πέρασε από την θέση ισορροπίας κατευθυνόμενο προς το M .

Επομένως η εξίσωση κίνησης του πρώτου σώματος είναι

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t)$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή της συνάντησης.

Την στιγμή t_1 το πρώτο σώμα έχει απομάκρυνση x_0 και θετική ταχύτητα. Συνεπώς,

$$\eta\mu(\omega t_1) = \frac{x_0}{A_1} = \frac{1}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu(\omega t_1) > 0. \text{ Άρα } \omega t_1 = \frac{\pi}{6}.$$

Η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος έχει εξίσωση

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Την στιγμή t_1 ισχύει ότι $x_2=x_0$ και $v_2 < 0$. Επομένως,

$$A_2 \eta\mu(\omega t_1 + \varphi) = x_0 \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Την στιγμή } t_1, v_2 < 0 \Rightarrow \omega A_2 \sigma\upsilon\nu(\omega t_1 + \varphi) < 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) < 0$$

$$\text{Άρα } \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος είναι:

$$x_2 = A_2 \eta\mu\left(\omega t + 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Η απόσταση d των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση:

$$d = |x_1 - x_2| = \left| A_1 \eta\mu(\omega t) - A_2 \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \right|.$$

Η ποσότητα $x = A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των ταλαντώσεων

$$\bar{x}_1 = A_1 \eta\mu(\omega t) \quad \text{και} \quad \bar{x}_2 = A_2 \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Για το πλάτος και την αρχική φάση της «σύνθετης ταλάντωσης» ισχύει ότι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{A_2 \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right). \text{ Άρα } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Επομένως η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $x = A \eta\mu(\omega t + \theta) = 4\sqrt{3} \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ (x σε cm).

Η απόσταση d των δύο σωμάτων γίνεται:

$$d = |x| = 4\sqrt{3} \left| \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \right| \quad (\text{d σε cm}).$$

Άρα η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι $d_{\max} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

β) Έστω t_2 η χρονική στιγμή που η απόσταση των δύο σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την στιγμή της συνάντησης.

$$\text{Επομένως, } \left| \eta\mu\left(\omega t_2 - \frac{\pi}{6}\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\omega t_2 - \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \omega t_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ ισχύει ότι:

$$\omega \Delta t = \omega t_2 - \omega t_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4} = 1 \text{ s}.$$

γ) Για τις χρονικές στιγμές της συνάντησης ισχύει ότι:

$$d = 0 \Leftrightarrow \left| \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \right| = 0 \Leftrightarrow \omega t - \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow \omega \Delta t = \pi \Delta k$$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές συνάντησης αντιστοιχούν σε διαδοχικές τιμές του k ($\Delta k = 1$).

$$\text{Άρα } \omega \Delta t = \pi \Leftrightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = 2 \text{ s}.$$

Τις χρονικές στιγμές της συνάντησης $\omega t = k\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\text{Άρα } x_1 = x_2 = A_1 \eta\mu(\omega t) = 6 \eta\mu\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Αν ο k είναι άρτιος τότε $x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\text{ cm}$

Αν ο k είναι περιττός τότε $x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -3\text{ cm}$.

2^η Λύση (οριακά εκτός διδακτέας ύλης)

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το Μ.

Θέτουμε $t_0=0$ την χρονική στιγμή της συνάντησης.

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_1) \text{ και } x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

Την στιγμή $t_0=0$ ισχύει ότι: $x_1 = x_2 = x_0$, $v_1 > 0$ και $v_2 < 0$.

Επομένως, $\eta\mu\varphi_1 = \frac{x_0}{A_1} = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, $\eta\mu\varphi_2 = \frac{x_0}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$, $\text{συν}\varphi_1 > 0$ και $\text{συν}\varphi_2 < 0$.

Άρα $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ και $\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι

$$x_1 = A_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ και } x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Η απόσταση d των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση:

$$d = |x_1 - x_2| = \left| A_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right| = \left| A_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right) \right|.$$

Η ποσότητα $x = A_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των ταλαντώσεων

$$\bar{x}_1 = A_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ και } \bar{x}_2 = A_2\eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Για το πλάτος και την αρχική φάση της «σύνθετης ταλάντωσης» ισχύει ότι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\text{συν}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

Για την διαφορά φάσης της «σύνθετης ταλάντωσης» από την πρώτη ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\frac{3\pi}{2}}{A_1 + A_2\text{συν}\frac{3\pi}{2}} = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right). \text{ Άρα } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Επομένως η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = 4\sqrt{3}\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 4\sqrt{3}\eta\mu(\omega t) \quad (x \text{ σε cm}).$$

Η απόσταση d των δύο σωμάτων γίνεται:

$$d = |x| = 4\sqrt{3}|\eta\mu(\omega t)| \quad (d \text{ σε cm}).$$

Άρα η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι $d_{\max} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

β) Έστω t_2 η χρονική στιγμή που η απόσταση των δύο σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την στιγμή της συνάντησης.

$$\text{Επομένως, } |\eta\mu(\omega t_2)| = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t_2) = \pm 1 \Leftrightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{4} = 1\text{s}$$

γ) Για τις χρονικές στιγμές της συνάντησης ισχύει ότι:

$$d = 0 \Leftrightarrow |\eta\mu(\omega t)| = 0 \Leftrightarrow \omega t = k\pi \Rightarrow \omega \Delta t = \pi \Delta k$$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές συνάντησης αντιστοιχούν σε διαδοχικές τιμές του k ($\Delta k=1$).

$$\text{Άρα } \omega \Delta t = \pi \Leftrightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = 2\text{s}.$$

Τις χρονικές στιγμές της συνάντησης $\omega t = k\pi$

$$\text{Άρα } x_1 = x_2 = A_1\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) = 6\eta\mu\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Αν ο } k \text{ είναι άρτιος τότε } x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \text{ cm}$$

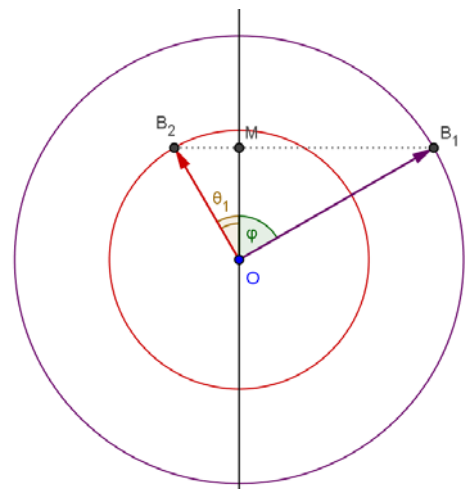
$$\text{Αν ο } k \text{ είναι περιττός τότε } x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -3 \text{ cm}.$$

2^η Λύση (με στρεφόμενα διανύσματα)

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το Μ.

Έστω \vec{OB}_1 και \vec{OB}_2 τα στρεφόμενα διανύσματα που αναπαριστούν τις απομακρύνσεις των δύο σωμάτων. Την στιγμή της συνάντησης το πρώτο σώμα έχει θετική απομάκρυνση και θετική ταχύτητα. Συνεπώς το στρεφόμενο διάνυσμά του βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Το δεύτερο σώμα έχει θετική απομάκρυνση και αρνητική ταχύτητα. Άρα το στρεφόμενο διάνυσμά του βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

Την στιγμή της συνάντησης τα δύο σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση. Επομένως τα στρεφόμενα διανύσματά τους έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y .



$$\text{Ισχύει ότι } \text{συν}\varphi = \frac{OM}{OB_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ και } \text{συν}\theta_1 = \frac{OM}{OB_2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

Επειδή $\theta_1 + \varphi = \frac{\pi}{2}$, τα δύο στρεφόμενα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

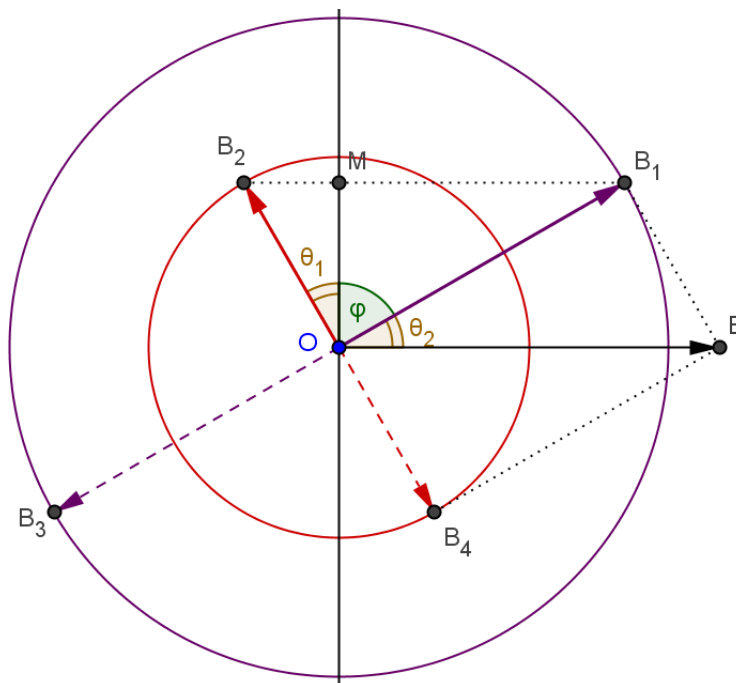
Η απόσταση των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση $d = |x_1 - x_2|$.

Η ποσότητα $x = x_1 - x_2$ μπορεί να θεωρηθεί σύνθεση των ταλαντώσεων με στρεφόμενα διανύσματα τα $\overline{OB_1}$ και $\overline{OB_4} = -\overline{OB_2}$. Έστω $\overline{OB} = \overline{OB_1} + \overline{OB_4}$

Τα διανύσματα $\overline{OB_1}$ και $\overline{OB_4}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

$$\text{Ισχύει δε ότι } \text{εφ}\theta_2 = \frac{OB_4}{OB_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, $\theta_2 + \varphi = \frac{\pi}{2}$. Άρα το \overline{OB} (την στιγμή της συνάντησης) έχει την διεύθυνση του άξονα x .



α) Η ποσότητα x αναπαριστάται από το στρεφόμενο διάνυσμα \overline{OB} . Επομένως η μέγιστη τιμή της είναι ίση με το μέτρο του. Συνεπώς, $d_{\max} = OB = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

β) Η απόσταση των δύο σωμάτων θα γίνει μέγιστη όταν το \overline{OB} έχει την διεύθυνση του άξονα y .

Αυτό γίνεται για πρώτη φορά μετά από $\frac{T}{4} = 1 \text{ s}$.

γ) Τα δύο σώματα συναντώνται κάθε φορά που η απόστασή τους είναι μηδέν. Επομένως συναντώνται όταν η προβολή του \overline{OB} στον άξονα y είναι 0. Αυτό συμβαίνει όταν το \overline{OB} έχει την διεύθυνση του άξονα x . Το

χρονικό διάστημα μεταξύ δύο συναντήσεων είναι προφανώς $\frac{T}{2} = 2s$.

Όταν το \overrightarrow{OB} έχει την διεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox τότε συναντώνται στο M και $x=3cm$.

Όταν το \overrightarrow{OB} έχει την διεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα Ox' τότε συναντώνται στο συμμετρικό του M και $x=-3cm$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

E. Κορφιάτης