

Σύνθεση Ταλαντώσεων και κύμα.

Το σημείο Ο γραμμικού ελαστικού μέσου το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$, εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α. Α. Τ που γίνονται στην ίδια διεύθυνση, κάθετα στον άξονα $x'x$ και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = 0,1\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{3})(S.I) \text{ και } y_2 = 0,1\sqrt{3}\eta\mu(10\pi t - \frac{\pi}{6})(S.I).$$

- i) Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ο.
- ii) Θεωρούμε το σημείο Ο σαν πηγή αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του Ox ημιάξονα. Αν τη χρονική στιγμή t_1 που η πηγή ολοκληρώνει δύο ταλαντώσεις το κύμα φθάνει σε ένα σημείο Γ που απέχει από την πηγή $x_\Gamma = 20cm$, να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής.
- iii) Η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου Κ του ελαστικού μέσου την ίδια χρονική στιγμή t_1 ισούται με $\varphi_K = \frac{3\pi}{2}$. Ποια χρονική στιγμή ξεκίνησε να ταλαντώνεται το σημείο αυτό; Να εξετάσετε προς τα πού θα κινηθεί το σημείο Κ αμέσως μετά τη στιγμή t_1 .
- iv) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ του σημείου Κ και του πιο μακρινού σημείου Η (από την πηγή Ο) του ελαστικού μέσου που αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_2 = 0,7s$.
- v) Να βρείτε τον αριθμό των υλικών σημείων του μέσου, μεταξύ των Κ, Η που έχουν την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με την πηγή κάθε στιγμή.
- vi) Να βρείτε πόσα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου, τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,7s$, έχουν μέγιστη κινητική και πόσα έχουν δυναμική ίση με $\frac{U_{\max}}{4}$.

Απάντηση:

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (10\pi t + \frac{\pi}{3}) - (10\pi t - \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

Άρα το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = 0,2m$$

Η διαφορά φάσης θ μεταξύ της συνισταμένης y και της συνιστώσας y_2 με τη μικρότερη φάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_1\eta\mu\frac{\pi}{2}}{A_2 + A_1\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ αφού } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Άρα:

$$\theta = \varphi_y - \varphi_{y_2} \Rightarrow \varphi_y = \theta + \varphi_{y_2} = \frac{\pi}{6} + (10\pi t - \frac{\pi}{6}) = 10\pi t (S.I)$$

Συνεπώς η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης περιγράφεται από τη σχέση:

$$y = 0,2\eta\mu 10\pi t \quad (S.I)$$

i) Συγκρίνοντας την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο με τη γενική σχέση: $y = A\eta\mu\omega t$, βρίσκουμε ότι:

$$\omega = 10\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow T = 0,2s$$

Αφού η πηγή έχει εκτελέσει 2 ταλαντώσεις θα ισχύει: $t_1 = 2T = 0,4s$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται: $v = \frac{\chi_{\Gamma}}{t_1} = 0,5 \frac{m}{s}$ και το μήκος κύματος:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,1m.$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 10x) \quad (S.I)$$

ii) Η φάση του κύματος είναι: $\varphi = 2\pi(5t - 10x)$. Για τη φάση του σημείου Κ έχουμε:

$$1,5\pi = 2\pi(5 \cdot 0,4 - 10x_K) \Rightarrow x_K = 0,125m$$

Άρα αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή:

$$t_K = \frac{x_K}{v} = 0,25s.$$

Η απομάκρυνση του Κ τη στιγμή $t_1 = 0,4s$ είναι:

$$y_K = 0,2\eta\mu\varphi_K = 0,2\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -0,2m,$$

δηλαδή βρίσκεται στην αρνητική ακρότατη θέση, οπότε αμέσως μετά θα κινηθεί κατά τη θετική φορά.

iii) Τη στιγμή $t_2 = 0,7s$ η φάση του Κ είναι: $\varphi_K = 2\pi(5 \cdot 0,7 - 10 \cdot 0,125) = 4,5\pi$. Το σημείο Η που αρχίζει να ταλαντώνεται την ίδια στιγμή έχει: $\varphi_H = 0$. Άρα $\Delta\varphi = 4,5\pi$

iv) Το σημείο Η βρίσκεται στη θέση: $\chi_H = v \cdot t_2 = 0,35m$. Τα σημεία του μέσου που έχουν την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με την πηγή κάθε στιγμή, βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με αυτή. Συνεπώς:

$$\Delta\chi = \chi - 0 = \chi = \kappa\lambda = 0,1\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Όμως:

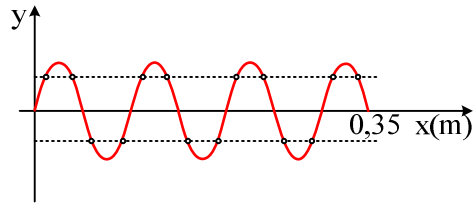
$$\chi_K < \chi < \chi_H \Rightarrow 0,125 < x < 0,35 \Rightarrow 0,125 < 0,1\kappa < 0,35 \Rightarrow 1,25 < \kappa < 3,5 \Rightarrow \kappa = 2,3$$

Άρα υπάρχουν 2 σημεία.

v) Μέγιστη κινητική ενέργεια έχουν τα σημεία που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας, ενώ δυναμική ίση με το $\frac{1}{4}$ της μέγιστης, όσα βρίσκονται στη θέση: $y = \pm \frac{A}{2}$. Τη στιγμή $t_2 = 0,7s$ το κύμα έχει φθάσει στη θέση: $\chi_H = v \cdot t_2 = 0,35m$, όπου:

$$\frac{x_H}{\frac{\lambda}{4}} = \frac{0,35}{0,025} = 14 \Rightarrow x_H = 14 \frac{\lambda}{4} = 3,5\lambda .$$

Σχεδιάζοντας το στιγμιότυπο:



βλέπουμε ότι υπάρχουν 8 σημεία μέγιστης κινητικής ενέργειας και 14 σημεία με $\frac{U_{\max}}{4}$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης