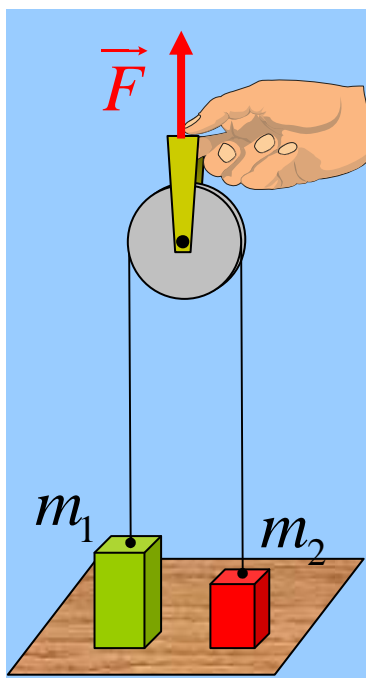


Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε;



Αν η τροχαλία έχει μάζα M ποια είναι η ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκήσω ώστε να σηκωθεί μόνο το m_2 ;

Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκήσω ώστε να σηκωθεί και το m_1 ;

Θεωρήσατε ότι $m_1 > m_2$.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται γνωστή.

Απάντηση:

Θα υποθέσουμε ότι ασκείται η ελάχιστη δύναμη που ανασηκώνει μόνο το m_2 .

Επειδή μηδενίζεται η κάθετη δύναμη από το έδαφος και επειδή το κόκκινο σώμα κινείται χωρίς επιτάχυνση ισχύει ότι:

$$T = m_2 g$$

Η επιτάχυνση του σημείου A είναι μηδενική μια και είναι ίση με αυτήν του πράσινου σώματος.

Η επιτάχυνση του B είναι τόση όση και του κόκκινου σώματος. Η επιτάχυνση όμως του B είναι διπλάσια αυτής της τροχαλίας διότι :

$$a_A = \alpha_r - a_\gamma R \Rightarrow 0 = \alpha_r - a_\gamma R \Rightarrow \alpha_r = a_\gamma R$$

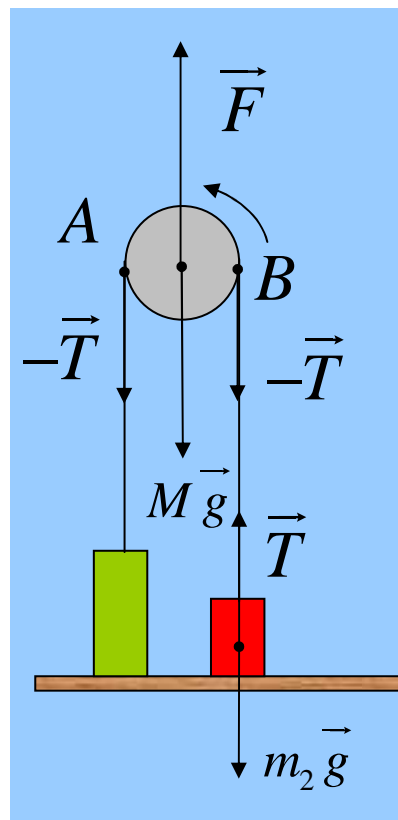
$$a_B = \alpha_r + a_\gamma R = 2\alpha_r$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι μηδέν οπότε η συνολική ροπή στην τροχαλία είναι επίσης μηδέν.

Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις που δέχεται από το νήμα, δυνάμεις τριβής τελικά, έχουν ίδιο μέτρο.

Η επιτάχυνση της τροχαλίας είναι επίσης μηδέν ως το ήμισυ της μηδενικής επιτάχυνσης του κόκκινου οπότε:

$$F - Mg - 2T = 0 \Rightarrow F = 2T + Mg \Rightarrow F = Mg + 2m_2 g$$



Προσέξτε ότι η δύναμη είναι μεγαλύτερη από αυτό που ίσως διαισθάνεται κάποιος δηλαδή το άθροισμα των βαρών του κόκκινου και της τροχαλίας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ασκούμε την ελάχιστη δύναμη η οποία ανασηκώνει το m_1 .

Προφανώς είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη και φυσικά το m_2 έχει ανασηκωθεί και κινείται με επιτάχυνση \vec{a} .

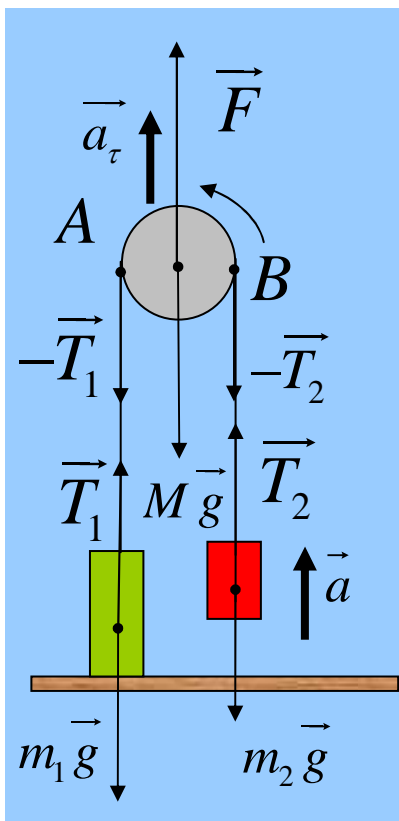
Το πράσινο σώμα έχει μηδενική επιτάχυνση οπότε $a_A = 0$

$$a_A = \alpha_\tau - a_\gamma R \Rightarrow 0 = \alpha_\tau - a_\gamma R \Rightarrow \alpha_\tau = a_\gamma R$$

$$a_B = \alpha_\tau + a_\gamma R = 2\alpha_\tau$$

$$\text{Όμως } a_B = a \Rightarrow 2\alpha_\tau = a \Rightarrow \alpha_\tau = \frac{a}{2}$$

$$\text{Επίσης } a_\gamma = \frac{\alpha_\tau}{R} = \frac{a}{2R}$$



Για το κόκκινο σώμα:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (1)$$

Για το πράσινο σώμα:

$$T_1 - m_1 g = 0 \quad (2)$$

Για την τροχαλία:

$$F - Mg - T_1 - T_2 = M \cdot \frac{a}{2} \quad (3)$$

και

$$\sum \tau = I \cdot a_\gamma \Rightarrow T_1 R - T_2 R = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{2R}$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{M}{4} a \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (4) έχουμε ότι:

$$m_1 g - m_2 a - m_2 g = \frac{M}{4} a \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g \quad (5)$$

Από τις (1), (5) έχουμε ότι:

$$T_2 = m_2 g + m_2 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g \quad (6)$$

Και από τις (2), (3), (6) έχουμε ότι:

$$F = Mg + T_1 + T_2 + M \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow F = Mg + m_1g + m_2g + m_2 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g + \frac{M}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g$$

$$\Rightarrow F = Mg + m_1g + m_2g + \left(m_2 + \frac{M}{2} \right) \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g$$

Παρατηρήσατε ότι η δύναμη που απαιτείται για να ανασηκωθεί και το δεύτερο είναι μεγαλύτερη από το συνολικό βάρος κατά τον παράγοντα:

$$\left(m_2 + \frac{M}{2} \right) \frac{m_1 - m_2}{m_2 + \frac{M}{4}} g$$

Παρατηρήσεις:

1. Αν $m_1 = m_2 = m$ η ελάχιστη δύναμη που απαιτείται για να σηκωθεί η m_2 και η ελάχιστη τιμή που απαιτείται για να σηκωθεί και η m_1 ταυτίζονται. Είναι $F = Mg + 2mg$.

2. Αν η μάζα της τροχαλίας είναι αμελητέα τότε η ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκήσω ώστε να σηκωθεί το m_2 είναι $F = 2m_2g$, διπλάσια από το βάρος του σώματος που ανασηκώνω,

Χάνουμε σε δύναμη αλλά κερδίζουμε σε μετατόπιση μια και όταν ανεβάζουμε το χέρι μας $10cm$ το κόκκινο σώμα ανεβαίνει $20cm$ και τούτο γιατί η ταχύτητα της τροχαλίας είναι η μισή από την ταχύτητα του σώματος. Ή αλλιώς το αριστερό σχοινί μακραίνει κατά $10cm$, το δεξί κονταίνει κατά $10cm$ οπότε περνάει από την τροχαλία σχοινί $20cm$ όσο ανεβαίνει το σώμα.

3. Αν η m_2 είναι αμελητέα τότε η ελάχιστη δύναμη που απαιτείται για να ανασηκωθεί και το m_1 είναι :

$$\Rightarrow F = Mg + 3m_1g .$$

Αυτό μοιάζει παράδοξο και για να ισχύσει θα πρέπει η τριβή μεταξύ σχοινοῦ και τροχαλίας να είναι σημαντική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Γιάννης Κυριακόπουλος