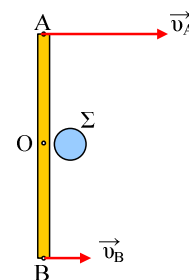


Μια σύνθετη κίνηση και μια κρούση.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας 1kg κινείται οριζόντια στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης, χωρίς τριβές και σε μια στιγμή, όπου τα άκρα της έχουν ταχύτητες της ίδιας φοράς με μέτρα $v_A=6\text{m/s}$ και $v_B=2\text{m/s}$, συγκρούεται ελαστικά με μια μικρή σφαίρα Σ , που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας 1kg , η οποία ήταν ακίνητη, όπως στο σχήμα. Η σφαίρα Σ κτυπά τη ράβδο στο μέσον της O .



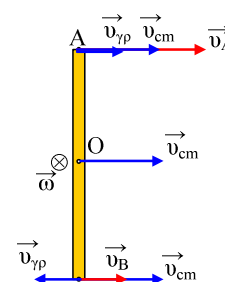
i) Υπολογίστε την ταχύτητα του μέσου O , καθώς και την κινητική ενέργεια της ράβδου, πριν την κρούση.

ii) Να βρεθούν οι κινήσεις που θα εκτελέσουν τα δυο σώματα μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=M\ell^2/12$.

Απάντηση:

i) Αφού οι ταχύτητες των σημείων A και B δεν είναι ίσες, η ράβδος δεν μετατοπίζεται παράλληλα προς τον άξονά της AB , συνεπώς δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, αλλά σύνθετη. Μπορούμε να μελετήσουμε τη σύνθετη αυτή κίνηση θεωρώντας ότι η ράβδος μεταφέρεται με μια ταχύτητα κέντρου μάζας O , ίση με v_{cm} ενώ **και** στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας της O (η ράβδος είναι ομογενής) με γωνιακή ταχύτητα ω .



Έτσι οι ταχύτητες των δύο άκρων είναι:

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\rho\alpha\mu} = v_{cm} + \omega \cdot R$$

$$v_B = v_{cm} - v_{\gamma\rho\alpha\mu} = v_{cm} - \omega \cdot R$$

$$\text{όπου } R = \ell/2$$

Έτσι οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$v_{cm} + \omega \cdot 0,5 = 6 \quad \text{και}$$

$$v_{cm} - \omega \cdot 0,5 = 2$$

Μονάδες στο S.I.

Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε $v_{cm}=4\text{m/s}$ και $\omega=4\text{rad/s}$.

Η αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου θα είναι λοιπόν:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega^2$$

και με αντικατάσταση

$$K_{\text{πριν}} = \frac{26}{3} \text{ J}$$

ii) Για την μετωπική (η ταχύτητα του σημείου O τη στιγμή της κρούσης κατευθύνεται στο κέντρο μάζας της σφαίρας) ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων θα ισχύουν:

A) Αρχή διατήρησης της ορμής:

$$M \cdot v_{cm} = M \cdot v_1 + M \cdot v_2 \quad (1)$$

B) Αρχή διατήρησης της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$I \cdot \omega = I \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 \quad (2)$$

Αλλά η σφαίρα θεωρείται υλικό σημείο, συνεπώς δεν θα έχει στροφορμή λόγω περιστροφής και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \omega = I \cdot \omega_1$$

Δηλαδή η ράβδος θα συνεχίσει να στρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και μετά την κρούση, γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής εκτελώντας ομαλή στροφορμική κίνηση.

Γ) Διατήρηση της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}'^2 + \frac{1}{2} I \omega'^2 + \frac{1}{2} M_1 v_2'^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}'^2 + \frac{1}{2} M_1 v_2'^2 \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) μας επιτρέπουν να υποστηρίξουμε ότι στην πραγματικότητα η κρούση συνέβη εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης της ράβδου, όπου η ράβδος συμπεριφέρεται ως υλικό σημείο και συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο υλικό σημείο ίσης μάζας, οπότε και ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Με άλλα λόγια μετά την κρούση η ράβδος θα συνεχίσει να στρέφεται, όπως και πριν, γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της, αλλά χωρίς να μεταφέρεται, αφού το μέσον της θα παραμένει ακίνητο, εκτελώντας μια απλή στροφορμική κίνηση. Ενώ πριν είχαμε μετακίνηση του άξονα περιστροφής, τώρα αυτός θα παραμένει ακίνητος.

Αντίθετα η σφαίρα Σ θα κινηθεί ευθύγραμμα στη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας του κέντρου μάζας Ο και με σταθερή ταχύτητα 4m/s.

Σχόλιο:

Στην παραπάνω περίπτωση η σφαίρα θεωρήθηκε υλικό σημείο. Αυτό δεν ήταν απαραίτητο, αφού και ακτίνα συγκεκριμένη να εδίνετο, το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική. Στη διάρκειά της δεν εμφανίζονται ροπές που να μπορούν να μεταβάλλουν τη γωνιακή ταχύτητα, ούτε της ράβδου ούτε της σφαίρας. Η δύναμη αλληλεπίδρασης, απλά μεταβάλλει την ορμή κάθε σώματος. Αν όμως η κρούση γινόταν σε κάποιο άλλο σημείο της ράβδου σε απόσταση d από το Ο, τότε η κρούση θα ήταν μεν και πάλι μετωπική, αλλά η ασκούμενη στη ράβδο δύναμη, θα μετέβαλλε την μεταφορική ταχύτητα, αλλά θα είχε και ροπή, οπότε θα μετέβαλλε και την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Αυτό δεν σημαίνει βέβαια ότι θα άρχιζε η σφαίρα να στρέφεται, απλά θα παρουσιαζόταν στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα στο Ο, ίση με $M_2 \cdot v_{\text{σφ}} \cdot d$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης

