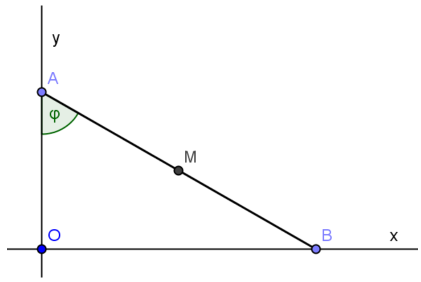
Μια ράβδος γλιστρά στις πλευρές ορθής γωνίας

Ορθή γωνία xOy βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και οι πλευρές της Ox και Oy είναι οριζόντια και κατακόρυφη αντιστοίχως. Μια λεπτή ομογενής ράβδος AB μήκους L και μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές με τα άκρα της σε επαφή με τις πλευρές της γωνίας. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη και ο άξονάς της είναι κατακόρυφος. Αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη να κινηθεί.



Α) Να βρεθούν συναρτήσει της γωνίας φ που σχηματίζει η ράβδος με την πλευρά Oy της γωνίας xOy.

1) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου
2) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου
3) Οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από τις πλευρές της γωνίας

Β) Να βρεθεί η γωνία φ για την οποία η ράβδος χάνει την επαφή της με την πλευρά Oy.

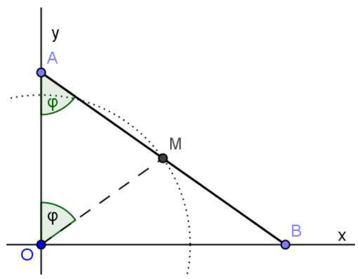
Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτήν $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Λύση

Α) Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι το μέσον της Μ.

Επειδή η ΟΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισχύει ότι

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2} \text{ και } \widehat{OAB} = \widehat{AOM} = \varphi$$



Επομένως το κέντρο μάζας της ράβδου κινείται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $\frac{L}{2}$.

Επειδή η γωνία στροφής της ράβδου είναι ίση με την γωνία στροφής του κέντρου μάζας της, η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του κέντρου μάζας της είναι ίση με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου. Συνεπώς,

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_M = \omega\frac{L}{2} \qquad (1)$$

Α1) Η ενέργεια της ράβδου είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση:

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mg\frac{OA}{2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\omega^2 + mg\frac{L\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 + \frac{mgL}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

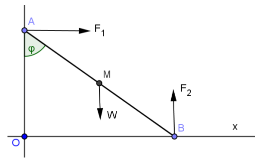
Την στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί ω=0 και φ=0. Άρα $E = \frac{mgL}{2}$.

Επειδή η συνολική ενέργεια της ράβδου παραμένει σταθερή, ισχύει ότι:

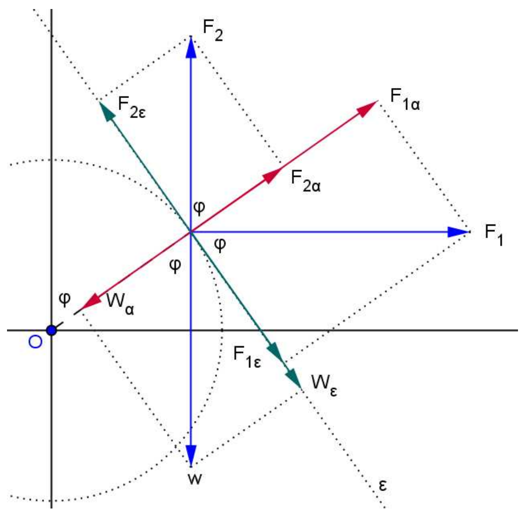
$$\frac{mgL}{2} = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 + \frac{mgL}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{L}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} \qquad (3)$$

Α2) Στην ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος της w, η δύναμη F_1 από την πλευρά Oy και η δύναμη F_2 από την πλευρά Ox.



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στο κέντρο μάζας και τις αναλύουμε σε δύο κάθετους άξονες. Ο ένας έχει την διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου, που διαγράφει το κέντρο μάζας, και ο άλλος την διεύθυνση της εφαπτομένης του στο σημείο Μ.



Η συνισταμένη των δυνάμεων στην διεύθυνση της ακτίνας είναι η κεντρομόλος δύναμη.

$$m\frac{\upsilon_{cm}^2}{R_{cm}} = m\omega^2 R_{cm} = m\frac{L}{2}\omega^2$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων στην διεύθυνση της εφαπτομένης είναι υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Επομένως, Η συνισταμένη των δυνάμεων στην διεύθυνση της εφαπτομένης είναι ίση με

$$m\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = m\frac{L}{2}\frac{d\omega}{dt} = m\frac{L}{2}\alpha_\gamma$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$w_\alpha - F_{2\alpha} - F_{1\alpha} = m\omega^2\frac{L}{2} \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - F_2\sigma\upsilon\nu\varphi - F_1\eta\mu\varphi = m\frac{L}{2}\omega^2 \qquad (4)$$

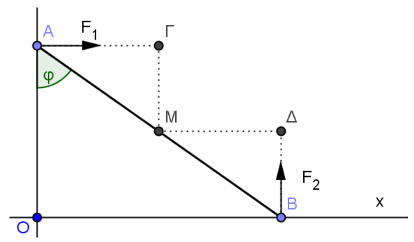
$$w_\varepsilon + F_{1\varepsilon} - F_{2\varepsilon} = m\frac{L}{2}\alpha_\gamma \Rightarrow w\eta\mu\varphi + F_1\sigma\upsilon\nu\varphi - F_2\eta\mu\varphi = m\frac{L}{2}\alpha_\gamma \qquad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των (4) , (5) ως προς F_1, F_2 προκύπτει ότι:

$$F_1 = m\frac{L\alpha_\gamma \sigma\upsilon\nu\varphi - L\omega^2 \eta\mu\varphi}{2} \qquad (6)$$

$$F_2 = mg - m\frac{L\alpha_\gamma \eta\mu\varphi + L\omega^2 \sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \qquad (7)$$

Για την στροφική κίνηση της ράβδου έχουμε:



$$\tau_2 - \tau_1 = I\alpha_\gamma \Rightarrow F_2(M\Delta) - F_1(M\Gamma) = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow F_2\frac{OB}{2} - F_1\frac{OA}{2} = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$F_2\frac{L\eta\mu\varphi}{2} - F_1\frac{L\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} = \frac{1}{12}mL^2\alpha_\gamma \Rightarrow 6(F_2\eta\mu\varphi - F_1\sigma\upsilon\nu\varphi) = mL\alpha_\gamma$$

Αντικαθιστώντας τις F_1, F_2 από τις (6), (7) βρίσκουμε ότι:

$$\alpha_\gamma = \frac{3g}{2L}\eta\mu\varphi \qquad (8)$$

Α3) Αντικαθιστώντας την γωνιακή επιτάχυνση από την (8) και την γωνιακή ταχύτητα από την (3) στις σχέσεις (6) και (7) βρίσκουμε ότι:

$$F_1 = \frac{3mg}{4}\eta\mu\varphi(3\sigma\upsilon\nu\varphi - 2) \text{ και } F_2 = \frac{mg}{4}(3\sigma\upsilon\nu\varphi - 1)^2 \qquad (9)$$

Β) Παρατηρούμε ότι $F_2 \geq 0$. Επομένως η ράβδος βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με την οριζόντια πλευρά της γωνίας. Η ράβδος χάνει την επαφή της με την κατακόρυφη πλευρά όταν

$$F_1 = 0 \Rightarrow 3\sigma\upsilon\nu\varphi - 2 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi \cong 48^\circ$$

<u>Σχόλια</u>

1) Καταλήξαμε στην σχέση (8) για την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, χωρίς να κάνουμε χρήση της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Με χρήση της σχέσης (8) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ενέργεια παραμένει σταθερή ως εξής:

$$E = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 + \frac{mgL}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{3}mL^2\omega\frac{d\omega}{dt} - \frac{mgL}{2}\eta\mu\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{3}mL^2\omega\alpha_\gamma - \frac{mgL}{2}\omega\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3}mL^2\omega\frac{d\omega}{dt} - \frac{mgL}{2}\eta\mu\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{3}mL^2\omega\alpha_\gamma - \frac{mgL}{2}\omega\eta\mu\varphi = \frac{mL^2\omega}{3}\left(\alpha_\gamma - \frac{3g}{2L}\eta\mu\varphi\right).$$

Αντικαθιστώντας την γωνιακή επιτάχυνση από την (8) βρίσκουμε ότι $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{σταθερή}$.

2) Με αντίστροφη πορεία, θεωρώντας δεδομένο το γεγονός ότι η ολική ενέργεια μένει σταθερή μπορούμε να καταλήξουμε στην σχέση (8).

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης