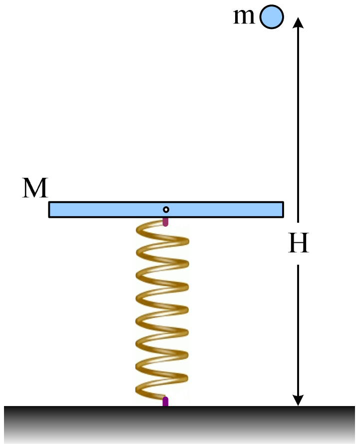
Μια κρούση με ταλάντωση και στροφική κίνηση.



Στο παραπάνω σχήμα το κατακόρυφο ελατήριο έχει σταθερά K=400N/m και φυσικό μήκος L_0=0,9m. Η οριζόντια πολύ λεπτή και ελαστική ράβδος έχει μήκος L=1m, μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο καρφί που είναι στερεωμένο στο ανώτερο σημείο του ελατηρίου. Ένα μικρό σώμα μάζας m αφήνεται από τον Βασίλη, που σκέφτηκε αυτή την άσκηση, σε απόσταση H= 1,6m από το έδαφος και μετά την ελαστική στιγμιαία κρούση με το ένα άκρο της εκτελεί ελεύθερη πτώση.

i) Ποια η σχέση των δύο μαζών που συγκρούονται ελαστικά;
ii) Αν m=1Kg, κινδυνεύει η οριζόντια ράβδος να συγκρουστεί με το έδαφος;
iii) Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η ράβδος όταν το μικρό σώμα φτάνει στο έδαφος;
iv) Ποια η ταχύτητα του άκρου της ράβδου όπου έγινε η κρούση, όταν για πρώτη φορά η ράβδος γίνεται στιγμιαία κατακόρυφη;

Δίνεται ότι το ελατήριο παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, $g=10m/s^2$ ενώ για τη ράβδο $Icm=ML^2/12$.

Απάντηση:

i) Με τη βοήθεια της ΑΔΟ για το σύστημα θα έχουμε $m\cdot\upsilon=M\cdot\upsilon_{cm}$ (1)

Με τη βοήθεια της ΑΔΣ γύρω από τον άξονα περιστροφής της ράβδου

$$M\cdot\upsilon\cdot L/2=I_{cm}\omega \ \text{ άρα } \omega=\frac{6m\upsilon}{ML} \quad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική από την ΑΔΕ για το σύστημα θα έχουμε

$$\tfrac{1}{2}\, m\cdot\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}\, M\cdot\upsilon_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\, I_{cm}\omega^2$$

και με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) θα πάρουμε M=4m.

ii) Το ελατήριο με τη ράβδο ισορροπούν άρα ισχύει η σχέση $K\cdot x_1=M\cdot g$ άρα x_1=0,1m

Έτσι η ράβδος ισορροπεί σε ύψος L_0-x_1=0,8m. Με την βοήθεια της ΑΔΕ για την πτώση της σφαίρα θα έχουμε $m\cdot g\cdot(H-L_0+x_1)= \tfrac{1}{2}\, m\cdot\upsilon^2$ άρα υ=4m/s και με τη βοήθεια της σχέσης (1) υ_{cm}=1m/s και της σχέσης (2) ω=6r/s

Η ράβδος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από το οριζόντιο καρφί που είναι δεμένο στο ελατήριο και ταυτόχρονα το κέντρο μάζας της ράβδου θα εκτελεί γατ με μέγιστη ταχύτητα του κέντρου μάζας $(\upsilon_{cm})_{max}$=1m/s και άρα πλάτους $A=(\upsilon_{cm})_{max}/\omega$=0,1m. Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί γατ με πλάτος

A=0,1m άρα το χαμηλότερο σημείο του απέχει από το έδαφος είναι L_0-x_1-A=0,7m που είναι μεγαλύτερο από το L/2 άρα η ράβδος δεν κινδυνεύει να χτυπήσει σε αυτό.

iii) Η μάζα m εκτελεί ελεύθερη πτώση άρα θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t' που θα βρεθεί από τη σχέση $H' = \frac{1}{2} g \cdot t'^2$ άρα t'=0,4s. Επομένως στον χρόνο αυτό η ράβδος θα έχει διαγράψει N=θ/2π=ω.t'/2π=1,2/π περιστροφές.

iv) Για να γίνει η ράβδος κατακόρυφη για πρώτη φορά θα πρέπει να περάσει χρόνος t_0=θ/ω=π/12sec.Την στιγμή αυτή το κέντρο μάζας άρα και οποιαδήποτε σημείο της ράβδου θα έχει κατακόρυφη ταχύτητα που θα δίνεται από την σχέση $υ_ψ=(υ_{cm})_{max}συνωt_0$ (αν δεχθούμε ως θετική φορά την προς τα κάτω) άρα $υ_ψ=1συν10π/12=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s. Έτσι η συνολική ταχύτητα του άκρου της ράβδου θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας λόγω περιστροφής υx=ωL/2 αλλά και της κατακόρυφης ταχύτητας $υ_ψ$ λόγω της γατ. Έτσι $υ_{ολ}=\sqrt{9,75}$ m/s.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ελευθερίου Χρήστος