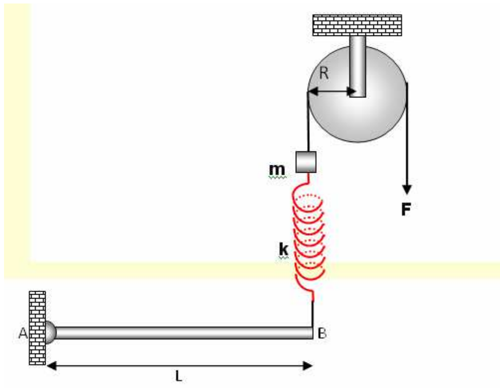
Μια τροχαλία σε ισορροπία, αλλά και σε περιστροφή



Δίνεται η διάταξη του παρακάτω σχήματος: Η ράβδος ΑΒ, μάζας M=2kg και μήκους L=1m ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια της άρθρωσης Α και του κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m. Στο άνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο μικρό σώμα, μάζας m=1kg, το οποίο με τη σειρά του είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι του δίσκου της σταθερής τροχαλίας, ακτίνας R. Στο άλλο άκρο του νήματος ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F. Να βρεθούν:

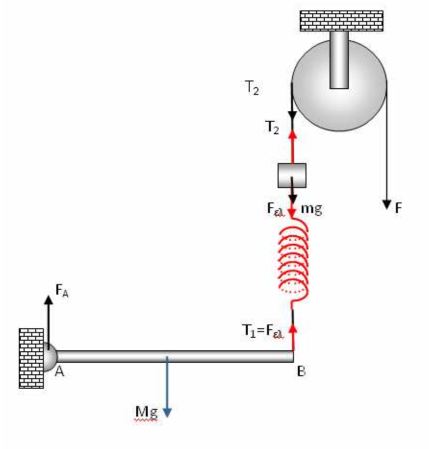
i) Η δύναμη F και η παραμόρφωση του ελατηρίου.

ii) Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται ελάχιστα πιο πάνω από το άκρο B της ράβδου, έτσι ώστε το ελατήριο να μη συνδέεται πλέον με τη ράβδο. Πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία $\varphi=30^o$ με την κατακόρυφη και πόση είναι η δύναμη από την άρθρωση τη στιγμή εκείνη, στη διεύθυνση της ράβδου;

iii) Ο ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία $\varphi'=60^o$ με την κατακόρυφη.

Δίνονται: $g=10m/s^2$ και για τη ράβδο $I_{cm}=ML^2/12$.

Απάντηση:



i) Η ισορροπία της ράβδου εξασφαλίζεται με τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα. Η ισορροπία ροπών για τη ράβδο ως προς την άρθρωση Α προϋποθέτει η δύναμη $T_1=F_{ελ}$ να έχει φορά προς τα επάνω, άρα το ελατήριο θα είναι προφανώς επιμηκυμένο. Η συνθήκη αυτή μας δίνει:

$$\sum\tau=0\rightarrow-Mg\frac{L}{2}+F_{ελ}L=0\rightarrow F_{ελ}=\frac{Mg}{2}\rightarrow k\Delta L=\frac{Mg}{2}\rightarrow$$

$$\Delta L=\frac{Mg}{2k}=0,1m$$

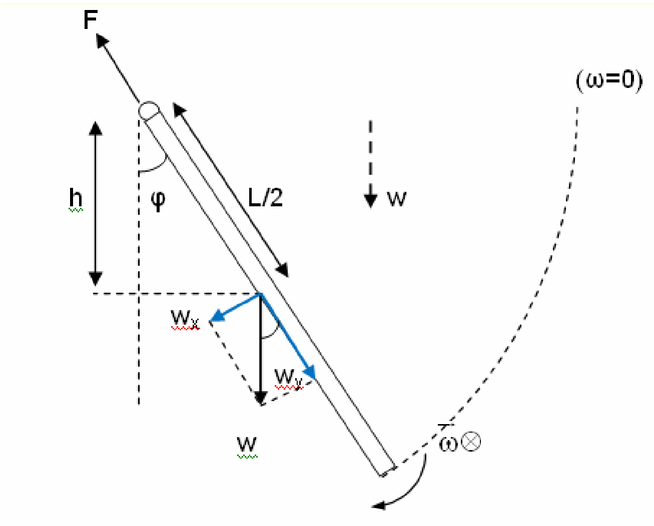
Η ισορροπία του σώματος μάζας m μας δίνει:

$$\sum F=0\rightarrow T_2=mg+F_{ελ}=10N+10N=20N$$

Τέλος, η ισορροπία του δίσκου της τροχαλίας μας δίνει:

$$\sum\tau=0\rightarrow T_2R-FR=0\rightarrow F=T_2=20N$$

ii) Ο ζητούμενος ρυθμός (σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα) θα είναι:



$$\frac{dL}{dt}=\sum\tau=w\frac{L}{2}\eta\mu\varphi=Mg\frac{L}{2}\frac{1}{2}=\frac{MgL}{4}=\frac{2kg\cdot10m/s^2\cdot1m}{4}=5Nm$$

Τη στιγμή εκείνη η ράβδος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω που υπολογίζεται εύκολα με ΑΔΜΕ. Πρώτα, όμως υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειάς της με θεώρημα Steiner:

$$I=I_{cm}+Md^2\xrightarrow{d=L/2}I=\frac{ML^2}{12}+\frac{ML^2}{4}=\frac{4ML^2}{12}=\frac{ML^2}{3}$$

$$\text{ΑΔΜΕ: } K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow0+Mgh=\frac{1}{2}I\omega^2\rightarrow Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2\rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\sigma\upsilon\nu\varphi}{L}}=\sqrt{\frac{3\cdot10m/s^2\cdot\sqrt{3}/2}{1}}=\sqrt{15\sqrt{3}}r/s$$

Η δύναμη από την άρθρωση θα δώσει μαζί με τη συνιστώσα w_y την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη. Θεωρώντας τη μάζα της ράβδου συγκεντρωμένη στο μέσο Μ (κέντρο μάζας) έχουμε:

$$\sum F_y=F_\kappa\rightarrow F-w_y=M\omega^2r\rightarrow F=Mg\sigma\upsilon\nu\varphi+M\omega^2\frac{L}{2}=M(g\sigma\upsilon\nu\varphi+\omega^2\frac{L}{2})\rightarrow$$

$$F=2kg\left(10\frac{m}{s^2}\frac{\sqrt{3}}{2}+15\sqrt{3}\frac{r^2}{s^2}\frac{1}{2}m\right)=25\sqrt{3}N$$

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=\frac{dW_\tau}{dt}=\frac{\tau\cdot d\theta}{dt}=\tau\cdot\omega\ (1)$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του ερωτήματος β) η ροπή τ και η γωνιακή ταχύτητα ω σε συνάρτηση με τη γωνία φ είναι:

$$\tau=Mg\frac{L}{2}\eta\mu\varphi'\ (2)\quad\text{και}\quad\omega=\sqrt{\frac{3g\sigma\upsilon\nu\varphi'}{L}}\ (3)$$

$$(1)\xrightarrow{(2)(3)}\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=Mg\frac{L}{2}\eta\mu\varphi'\sqrt{\frac{3g\sigma\upsilon\nu\varphi'}{L}}\xrightarrow{\varphi'=60^o}$$

$$\frac{dK}{dt} = 2kg \cdot 10\frac{m}{s^2}\frac{1m}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3 \cdot 10\, {}^{m}\!/\!{}_{s^2} \cdot \frac{1}{2}}{1m}} = 5\sqrt{3}\sqrt{15} = 5\sqrt{45} = 15\sqrt{5}J/s$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια
Γιώργος Κοϊνάκης