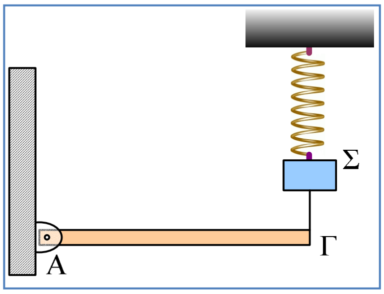
Μια περιστροφή και μια α.α.τ.



Η ράβδος ΑΓ έχει μήκος 3m, μάζα M=10kg και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, αρθρωμένη στο άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, με το άλλο της άκρο Γ, δεμένο μέσω κατακόρυφου νήματος, με σώμα Σ μάζας m=5kg, το οποίο ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος 1m και σταθερά 200N/m.

i) Πόση δύναμη δέχεται η ράβδος στο σημείο Α και πόσο είναι στην ισορροπία το μήκος του ελατηρίου;

ii) Σε μια στιγμή t=0, κόβουμε το νήμα που συνδέει το σώμα Σ με τη ράβδο, οπότε το Σ εκτελεί α.α.τ. ενώ η ράβδος στρέφεται γύρω από το άκρο της Α. Να βρείτε:

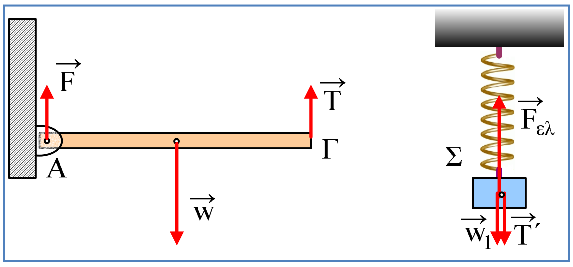
α) Την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ,

β) Την αρχική επιτάχυνση (για t=0) τόσο του σώματος Σ, όσο και του σημείου Γ της ράβδου.

γ) Την μέγιστη ταχύτητα του σώματος Σ και την μέγιστη ταχύτητα του σημείου Γ.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της I_{cm} = ml^2/12 , π^2≈10, g=10m/s^2 ενώ δεν αναπτύσσονται τριβές στην άρθρωση στο άκρο Α κατά την πτώση της ράβδου.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο-σώμα Σ, όπου T= T΄ η τάση του νήματος και F δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, η οποία έχει σχεδιαστεί κατακόρυφη.

Αυτό συμβαίνει αφού η ράβδος ισορροπεί και δεν υπάρχει καμιά άλλη οριζόντια δύναμη, οπότε αφού ΣF$_x$=0 → F$_x$=0. Εξάλλου ΣF$_y$=0 → F+T-Mg=0 → F+T=Mg (1)

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε: Στ$_Γ$=0 → $w \cdot \frac{\ell}{2} - F \cdot \ell = 0 \to F = \frac{Mg}{2} = 50N$

Οπότε από την σχέση (1) T=Mg-F=100N-50N=50N.

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί, συνεπώς ΣF=0 → F$_{ελ}$-T΄-mg=0 →kΔℓ =mg+T΄ →

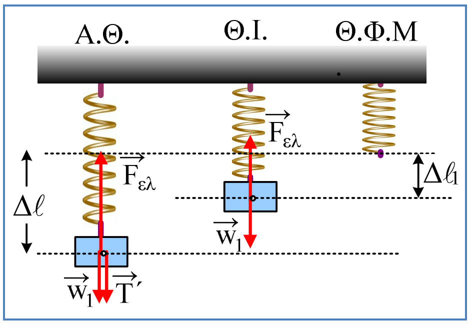
$$\Delta\ell = \frac{mg+T}{k} = \frac{5 \cdot 10 + 50}{200} m = 0,5m$$

Συνεπώς το μήκος του ελατηρίου είναι $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = 1m + 0,5m = 1,5m$

ii) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η θέση ισορροπίας και το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Στην θέση ισορροπίας:

$$ΣF=0 \to F_{ελ}-mg=0 \to \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = \frac{5 \cdot 10}{200} m = 0,25m$$



α) Αλλά η αρχική θέση, από την οποία ξεκινά την ταλάντωσή του το σώμα Σ, είναι ακραία θέση της ταλάντωσης, θέση πλάτους, οπότε $A= Δ\ell - Δ\ell_1$=0,25m και η ενέργεια ταλάντωσής του είναι:

$$E= ½\, k\, Δ\ell^2= ½\, 200·0,25^2 J=6,25J.$$

β) Μόλις κόψουμε το νήμα, το σώμα Σ αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$ΣF=mα \to a=\frac{F_{ελ}-mg}{m}=\frac{kΔ\ell}{m}=g=\frac{200\cdot 0,5}{5}m/s^2-10m/s^2=10m/s^2$$

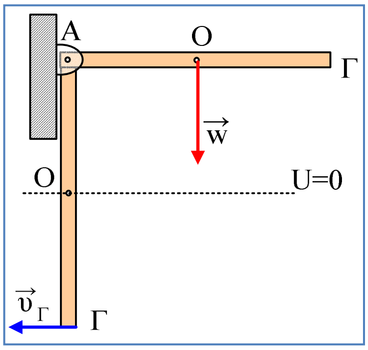
Εξάλλου για την στροφική κίνηση της ράβδου έχουμε (η φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού θετική):

$$Στ=I·α_{γων} \to Mg\cdot\frac{\ell}{2}=\left(\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\right)\cdot a_{γων} \to a_{γων}=\frac{3g}{2\ell}$$

Οπότε η επιτάχυνση του άκρου Γ είναι $α_Γ=α_{γων}\cdot \ell=\frac{3g}{2}$=15m/s².

γ) Η μέγιστη ταχύτητα του Σ είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής του:

$$υ_{max}=ω·A=\sqrt{\frac{k}{m}}A=\sqrt{\frac{200}{5}}\cdot 0,25m/s\approx\frac{\pi}{2}m/s$$



Η ράβδος επιταχύνεται στροφικά εξαιτίας της ροπής του βάρους, μέχρι να γίνει κατακόρυφη, αφού μετά η ασκούμενη ροπή θα την επιβραδύνει (στην περίπτωσή μας βέβαια πρόκειται να κτυπήσει και στον κατακόρυφο τοίχο, οπότε…). Παίρνουμε την ΑΔΜΕ για την περιστροφή της ράβδου, από την αρχική θέση, μέχρι την στιγμή που θα γίνει κατακόρυφη και έχουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}$$

$$Mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2 \to Mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\right)\omega^2 \to \omega=\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

Οπότε και $υ_Γ=ω\cdot \ell=\sqrt{3g\ell}=\sqrt{3\cdot 10\cdot 3}m/s\approx 3\pi$ m/s.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης