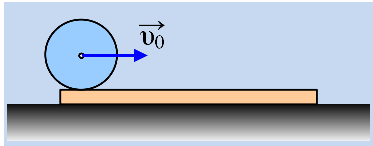
Μια περισσότερο ιδιόμορφη «κρούση».



Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια λεπτή σανίδα μάζας Μ. Εκτοξεύουμε οριζόντια, από το άκρο της σανίδας, μια σφαίρα ίδιας μάζας Μ με αρχική ταχύτητα $υ_0$ και με κινητική ενέργεια 36J, η οποία δεν περιστρέφεται. Παρατηρούμε ότι η σφαίρα αρχίζει να περιστρέφεται, ενώ ταυτόχρονα η σανίδα κινείται προς τα δεξιά επιταχυνόμενη για λίγο, ενώ στη συνέχεια τόσο η σφαίρα, όσο και η σανίδα κινούνται με σταθερές ταχύτητες.

i) Μπορείτε να ερμηνεύσετε τις παραπάνω παρατηρήσεις;

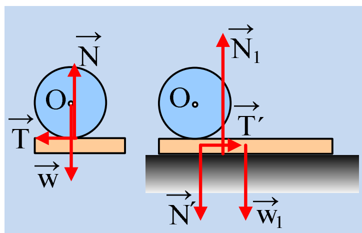
ii) Αποδείξτε ότι όταν τα σώματα αποκτήσουν σταθερές ταχύτητες ισχύει $υ_{cm}$-ωR=$υ_1$, όπου $υ_{cm}$ η ταχύτητα του άξονα της σφαίρας, ω η γωνιακή της ταχύτητα και $υ_1$ η ταχύτητα της σανίδας.

iii) Ας πάρουμε ένα νοητό σταθερό οριζόντιο άξονα z, ο οποίος ταυτίζεται με την αρχική θέση του άξονα περιστροφής της σφαίρας. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της στροφορμής του συστήματος σφαίρα-σανίδα, ως προς τον άξονα z, σε συνάρτηση με το χρόνο.

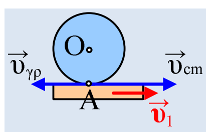
iv)Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής που αναπτύχθηκε μεταξύ σφαίρας και σανίδας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της Ι= 2/5 MR^2.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, όπου έχουμε δύο ζεύγη δράσης αντίδρασης Ν-Ν΄και Τ-Τ΄, ενώ N_1, η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Αφού η σφαίρα έχει αρχική ταχύτητα $υ_0$ προς τα δεξιά, δέχεται δύναμη τριβής προς τ' αριστερά, η οποία από τη μια επιβραδύνει (μεταφορικά) την σφαίρα, αλλά από την άλλη προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα να αρχίσει να περιστρέφεται, όπως οι δείκτες του ρολογιού. Εξάλλου η αντίδραση της τριβής που ασκείται στον σφαίρα η Τ΄, έχει φορά προς τα δεξιά, ασκείται στην σανίδα, την οποία και επιταχύνει. Ναι, αλλά για πόσο χρόνο συμβαίνουν όλα αυτά; Για όσο χρόνο ένα σημείο Α, επαφής της σφαίρας με τη σανίδα, να έχει μηδενική ταχύτητα, ως προς την σανίδα ή για να το πούμε με άλλα λόγια, έχει την ίδια ταχύτητα με την σανίδα. Αλλά τότε αφού το παραπάνω σημείο δεν κινείται ως προς την σανίδα, δεν υπάρχει λόγος να ασκείται δύναμη τριβής, συνεπώς η σφαίρα κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα $υ_{cm}$ και με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, ενώ και η σανίδα μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$.



ii) Θεωρούμε ότι η σφαίρα εκτελεί σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μια μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $υ_{cm}=υ_O$ και μια στροφική γύρω από τον άξονα περιστροφής της με γωνιακή ταχύτητα ω. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις ταχύτητες του σημείου Α, σημείου επαφής της σφαίρας με την σανίδα, όπου υ_{cm} η ταχύτητα εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης. Η ολίσθηση της σφαίρας θα σταματήσει όταν:

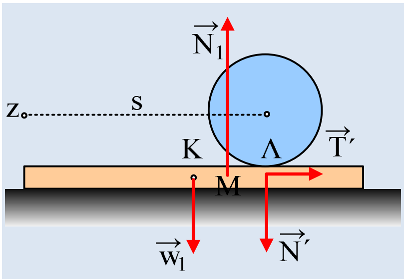
$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \omega R = \upsilon_1,$$

όπου υ_1 η ταχύτητα της σανίδας.

iii) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα σφαίρα-σανίδα είναι τα βάρη w=Mg και w_1=Mg και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_1. Αλλά στον κατακόρυφο άξονα η σφαίρα ισορροπεί, οπότε N=Mg, ενώ από την ισορροπία της σανίδας παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow N_1-w_1-N'=0 \rightarrow N_1-2Mg=0 \rightarrow N_1=2Mg.$$

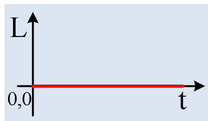
Το σύστημα λοιπόν σφαίρα-σανίδα είναι μονωμένο και $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$. Γιατί;



Αφού η σανίδα δεν στρέφεται η συνολική ροπή ως προς το κέντρο μάζας της Κ είναι μηδενική, αλλά τότε:

$$\tau_{N'}+\tau_{N1}+\tau_{T'}+\tau_{w1}=0 \rightarrow -N'\cdot(K\Lambda)+N_1\cdot(KM)+w_1\cdot 0+T'\cdot 0=0 \rightarrow$$
$$(K\Lambda)=2(KM)=2x,$$

Έστω ότι κάποια στιγμή το κέντρο της σφαίρας έχει μετατοπισθεί κατά s, όπως στο σχήμα.



$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi z}=N_1(s-x)-N'\cdot s-w_1\cdot(s-2x) =2Mg\cdot s-2Mg\cdot x-Mg\cdot s-Mg\cdot s+Mg\cdot 2x=0$

συνεπώς η στροφορμή του συστήματος κατά τον άξονα z παραμένει σταθερή και ίση με $L=L_{\alpha\rho\chi}=0$.

iv) Για το μονωμένο σύστημα σφαίρα-σανίδα ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi}=\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow M\upsilon_0 = M\upsilon_{cm}+M\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_0=\upsilon_{cm}+\upsilon_1 \quad (1)$$

Παίρνοντας την ΑΔΣ κατά (ως προς) τον άξονα z έχουμε:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 0=I\omega-M\upsilon_1 R \rightarrow \frac{2}{5}MR^2\omega=M\upsilon_1 R \rightarrow \omega R=2{,}5\upsilon_1 \quad (2)$$

Εξάλλου προηγουμένως αποδείξαμε ότι $\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega R=\upsilon_1$ (3)

Από (2) και (3) → $\upsilon_{cm}-2{,}5\upsilon_1=\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_{cm}=3{,}5\upsilon_1$, οπότε από την (1) βρίσκουμε $\upsilon_0=4{,}5\upsilon_1$ →

$$\upsilon_1=\frac{2}{9}\upsilon_0,\ \upsilon_{cm}=\frac{7}{9}\upsilon_0 \ \text{και}\ \omega R=\frac{5}{9}\upsilon_0$$

Με βάση τα παραπάνω η απώλεια της μηχανικής ενέργειας (η οποία εμφανίζεται σαν θερμική) είναι:

$$\Delta K = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \tfrac{1}{2} M\upsilon_0^2 - \left(\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_1^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}M\left(\frac{7\upsilon_0}{9}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}M\left(\frac{5\upsilon_0}{9}\right)^2 - \frac{1}{2}M\left(\frac{2\upsilon_0}{9}\right)^2 = \frac{2}{9}K_{\alpha\rho\chi} = 8J$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης