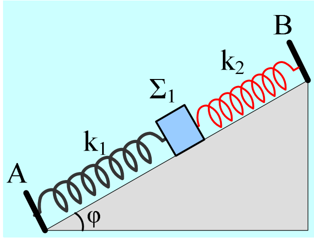
Μια παραλλαγή στο θέμα Δ Εξετάσεων 2012.



Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi=30^o$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1=30N/m$ και $k_2=70$ N/m αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα $\Sigma_{1,}$ και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο, οπότε διανύει απόσταση 0,1m μέχρι να σταματήσει την προς τα κάτω κίνησή του και να επιστρέψει, εκτελώντας ΑΑΤ.

i) Να βρεθεί η μάζα m_1 του σώματος Σ_1.

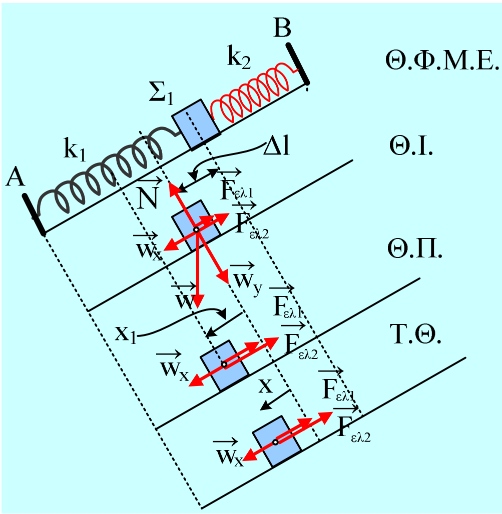
ii) α) Πάρτε το σώμα σε μια θέση Π, η οποία απέχει 3cm από την χαμηλότερη θέση της ταλάντωσης. Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

β) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι ΑΑΤ, υπολογίζοντας και την περίοδο ταλάντωσης.

Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα Σ_2 μικρών διαστάσεων μάζας $m_2=0,4$ kg. Το σώμα Σ_2 δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ_1 λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

iii) Έστω μια θέση Ρ, η οποία απέχει 3,5cm από την χαμηλότερη θέση της ταλάντωσης του συστήματος και στην οποία βρίσκεται κάποια στιγμή κινούμενο προς τα πάνω. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2 στην θέση Ρ και υπολογίστε τα μέτρα τους, την στιγμή αυτή.

Απάντηση:



Στο σχήμα δίπλα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας, όπως και στη θέση Π και στην τυχαία θέση (στις δύο τελευταίες θέσεις μόνο οι συνιστώσες στην διεύθυνση κίνησης, για να μην επιβαρυνθεί πολύ το σχήμα. Για τον ίδιο λόγο δεν σχεδιάστηκαν και τα ελατήρια…).

i) Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο k_1 έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell$, ενώ το k_2 έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$, συνεπώς και τα δυο ασκούν δυνάμεις με φορά προς τα πάνω.

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1}+F_{\varepsilon\lambda 2}-w_x=0 \rightarrow$$

$$k_1\cdot\Delta\ell+k_2\cdot\Delta\ell=m_1\cdot g\cdot\eta\mu\varphi \rightarrow (1)$$

Αλλά η αρχική θέση (θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων) είναι και ακραία θέση της ταλάντωσης, αφού το σώμα ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα την ταλάντωσή του, συνεπώς $\Delta\ell=A$, όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης. Εξάλλου η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων είναι ίση με $2A=0,1m$ ή $A=0,05m=\Delta\ell$ και η (1) δίνει:

$$m_1 = \frac{(k_1+k_2)\Delta\ell}{g\cdot\eta\mu\varphi} = \frac{(30+70)\cdot 0{,}05}{10\cdot {}^1\!/_2}kg = 1kg$$

ii) Η θέση Π απέχει 3cm από την κάτω ακραία θέση, συνεπώς το σώμα απέχει κατά x_1= 2cm από τη θέση ισορροπίας, οπότε το ελατήριο k_1 έχει συσπειρωθεί κατά 7cm, όσο έχει επιμηκυνθεί το k_2.

α) Έτσι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, με κατευθύνσεις όπως έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα, έχουν μέτρα:

Το βάρος $w=m_1g=10N$.

Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, όπου αφού το σώμα ισορροπεί $\Sigma F_y=0$ ή $N=m_1g\sigma\upsilon\nu\varphi=5\sqrt{3}N$

$F_{\varepsilon\lambda 1}=k_1\cdot(\Delta\ell+x_1)=30\cdot 0{,}07N=2{,}1N$ και $F_{\varepsilon\lambda 2}=k_2\cdot(\Delta\ell+x_1)=70\cdot 0{,}07N=4{,}9N$

β) Παίρνουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας, όπως στο σχήμα.

$$\Sigma F=w_x-F_{\varepsilon\lambda 1}-F_{\varepsilon\lambda 2}= m_1g\eta\mu\varphi-k_1(\Delta\ell+x)-k_2(\Delta\ell+x) = m_1g\eta\mu\varphi-k_1\Delta\ell-k_1x-k_2\Delta\ell-k_2x \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F=-(k_1+k_2)\cdot x$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο:

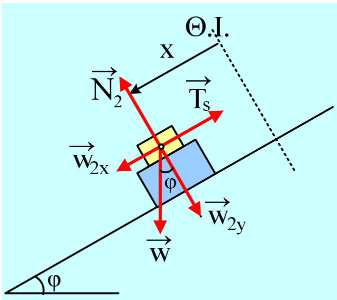
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1+k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{30+70}}s = 0{,}2\pi\ s$$

iii) Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας, για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F'_{\varepsilon\lambda 1} + F'_{\varepsilon\lambda 2} - (m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\varphi = 0 \rightarrow$$

$$\Delta\ell' = \frac{(m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\varphi}{k_1+k_2} = \frac{(1+0{,}4)\cdot 10\cdot {}^1\!/_2}{30+70}m = 0{,}07m$$

Με την ίδια συλλογιστική, όπως και πριν, βλέπουμε ότι τόσο είναι και το νέο πλάτος ταλάντωσης, A_1=7cm. Συνεπώς η θέση Ρ, απέχει από τη θέση ισορροπίας κατά 3,5cm και αν θεωρήσουμε θετική την φορά από το Α στο Β, x=-0,035m. Το Σ_2 ισορροπεί στον άξονα y, συνεπώς για τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του έχουμε:



$$w_2=m_2g= 4N,\ N=w_{2y}=w_2\sigma\upsilon\nu\varphi=2\sqrt{3}N$$

Εξάλλου από το 2^{ος} νόμο του Νεύτωνα, με βάση το διπλανό σχήμα, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=m_2\cdot\alpha \text{ ή } T-m_2g\eta\mu\varphi=m_2\cdot(-\omega^2x) \text{ ή } T= m_2g\eta\mu\varphi-m_2\omega^2x \quad (2)$$

Όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται στο σώμα Σ_2 και ω η νέα κυκλική συχνότητα, όπου λαμβάνοντας υπόψη ότι η κίνηση του συστήματος είναι ξανά ΑΑΤ με σταθερά $D=k_1+k_2$, έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{100}{1{,}4}}rad/s$$

Έτσι από την (2) παίρνουμε:

$$T = \mathrm{m}_2 \mathrm{g}\eta\mu\varphi - \mathrm{m}_2\omega^2 x = 0{,}4\cdot 10\cdot \tfrac{1}{2}N - 0{,}4\cdot\frac{100}{1{,}4}\cdot(-0{,}035)N = 3N$$

Σχόλια:

1) Το Σ_2 εκτελεί ταλάντωση, συνεπώς πρέπει να δέχεται συνισταμένη δύναμη με φορά προς την θέση ι-σορροπίας. Αφού η συνιστώσα λοιπόν w_{2x} έχει φορά προς το Α, η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς το Β, προς την θέση ισορροπίας, είναι δηλαδή ομόρροπη της ταχύτητας του σώματος.
2) Αν δεχτούμε ότι το σώμα Σ_2 εκτελεί ΑΑΤ, θα μπορούσαμε να γράψουμε και:

$$\Sigma F_x = -D_2 x \rightarrow T - m_2 g\cdot\eta\mu\varphi = -D_2 x \;\;\ldots.$$

όπου D_2 η λεγόμενη σταθερά επαναφοράς του σώματος m_2 ίση με $D_2=m_2\omega^2$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης