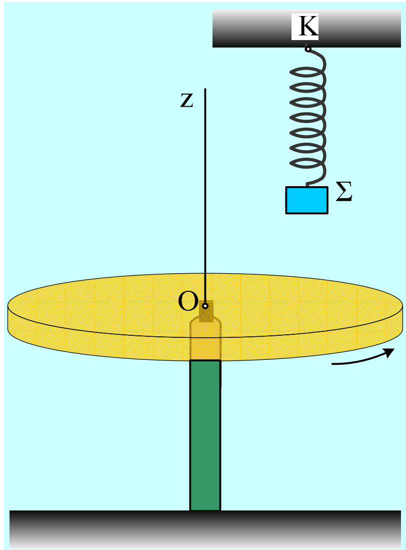
Μια κρούση σώματος με οριζόντιο κυκλικό τραπέζι.



Ένα τραπέζι σχήματος δίσκου, μάζας M=19,5kg και ακτίνας R=0,4m στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, όπως στο διπλανό σχήμα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Πάνω από το τραπέζι συγκρατείται ένα σώμα Σ, αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=1kg, το οποίο είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και φυσικού μήκους ℓ_0=0,2m. Το ελατήριο κρέμεται από σημείο K, το οποίο απέχει 0,3m από το τραπέζι, ο άξονάς του απέχει 0,2m από τον άξονα z και στη θέση αυτή έχει το φυσικό μήκος του. Αφήνουμε το σώμα τη στιγμή t_0=0, να κινηθεί και προσκολλάται στο τραπέζι. Αν αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ έχει ταχύτητα υ_1=0,6m/s, ζητούνται:

i) Η επιτάχυνση και η ταχύτητα του σώματος Σ, ελάχιστα πριν την κρούση.

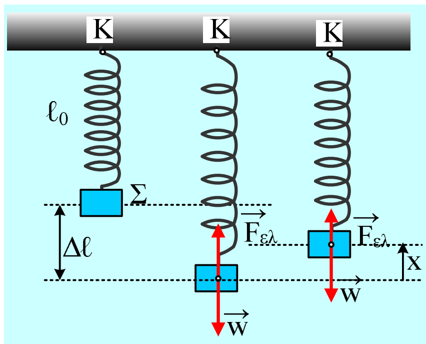
ii) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ που οφείλεται στην πλαστική του κρούση με το τραπέζι. Ποια η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής του ως προς (κατά) τον άξονα z;

iii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος Σ, τη στιγμή που θα έχει εκτελέσει μισή περιστροφή.

iv) Η γωνία κατά την οποία στρέφεται το τραπέζι από τη στιγμή t_0=0, μέχρι τη στιγμή της κρούσης.

Δίνεται ότι παρόλη την κρούση το τραπέζι δεν παύει να στρέφεται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα z χωρίς να «παλαντζάρει», η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα z I= ½ MR^2 και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο τραπέζι, το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = 0{,}3m - 0{,}2m = 0{,}1m$, αλλά τότε το σώμα έχει επιτάχυνση:

$$\Sigma F=m\alpha \rightarrow mg-k\cdot\Delta\ell = m\alpha \rightarrow$$

$$\text{Αλλά } F_{ελ}=k\Delta\ell=100\cdot 0{,}1N=10N=mg$$

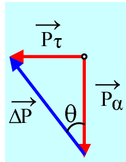
$$\text{Συνεπώς } \alpha=0$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σώμα έχει φτάσει στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που πραγματοποιεί, μέχρι τη στιγμή αυτή. Αλλά η παραπάνω κίνηση είναι ΑΑΤ, με πλάτος A=Δℓ=0,1m αφού ξεκινάει από ακραία θέση με μηδενική ταχύτητα, ενώ αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x από την θέση της κρούσης, θα έχουμε:

$$\Sigma F=F_{ελ}-mg= k(\Delta\ell-x)-mg= k\Delta\ell-kx-mg= -kx$$

Κατά συνέπεια η ταχύτητά του είναι $\upsilon_{max} = \omega\cdot A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{100}{1}}0{,}1m/s = 1m/s$.

ii) Πριν την κρούση το σώμα Σ είχε κατακόρυφη ορμή με μέτρο $P_π=mυ_{max}=1kg·m/s$, ενώ αμέσως μετά έχει οριζόντια ορμή μέτρου $P_μ=mυ_1=0,6kg·m/s$. Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του, με βάση το διπλανό σχήμα είναι:



$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_\tau - \vec{P}_a \;\rightarrow$$

Για το μέτρο της: $\Delta P = \sqrt{P_a^2 + p_\tau^2} = \sqrt{1^2 + 0,6^2}kgm/s = \sqrt{1,36}kgm/s$

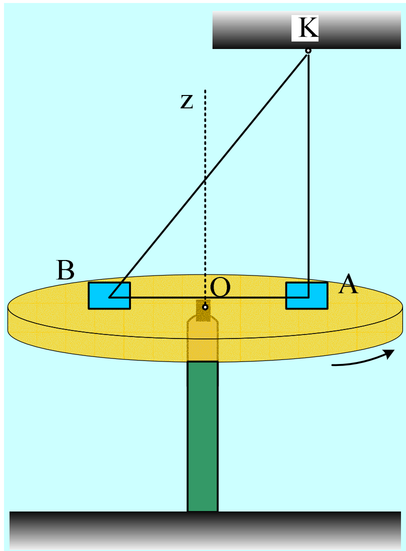
Ενώ για την διεύθυνση της του διανύσματος $\Delta\vec{P}$ έχουμε: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{P_\tau}{P_a} = 0,6$

Όσον αφορά τη στροφορμή ως προς τον άξονα z, αρχικά το σώμα δεν έχει στροφορμή, αφού κινείται παράλληλα στον άξονα ενώ μετά την κρούση έχει στροφορμή, πάνω στον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο: $L=mυR= 1·0,6·0,2\ kg·m^2/s=0,12\ kg·m^2/s$. ΄Αρα:

$$\Delta L=L_τ-L_α= 0,12\ kg·m^2/s$$

Με διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφη) και φορά προς τα πάνω.

iii) Τη στιγμή που το σώμα Σ, έχει κάνει μισή περιστροφή, βρίσκεται στην αντιδιαμετρική θέση Β, της θέσης κρούσης Α, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε από το Π.Θ. βρίσκουμε:



$$(KB) = \sqrt{(AB)^2 + (AK)^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2}m = 0,5m$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell'$=0,5m-0,2m=0,3m, ενώ αμέσως μετά την κρούση το στερεό τραπέζι-σώμα Σ έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \dfrac{\upsilon_1}{(OA)} = \dfrac{0,6m/s}{0,2m} = 3rad/s$.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του ελατηρίου, η οποία είναι συντηρητική, από τη θέση Α, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη θέση Β και παίρνουμε:

$$K_A+U_A=K_B+U_B. \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_s\omega_1^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}I_s\omega_2^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \rightarrow$$

Αλλά $I_s = \dfrac{1}{2}MR^2 + mr^2 = \dfrac{1}{2}19,5\cdot 0,4^2 kgm^2 + 1\cdot 0,2^2 kgm^2 = 1,6\,kg\cdot m^2$, οπότε:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{k\left((\Delta\ell)^2 - (\Delta\ell')^2\right)}{I_s}} = \sqrt{3^2 + \frac{100(0,1^2 - 0,3^2)}{1,6}}rad/s = 2rad/s$$

Συνεπώς το σώμα Σ θα έχει ταχύτητα $υ_2=ω_2·r=2·0,2m/s=0,4m/s$, οπότε η κινητική του ενέργεια θα είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}1\cdot 0,4^2 J = 0,08J$$

iv) Το χρονικό διάστημα, από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο το σώμα Σ, μέχρι να συγκρουσθεί με το τραπέζι είναι $t_1=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{100}}s=\frac{\pi}{20}s$.

Εξάλλου κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στο σύστημα τραπέζι-σώμα Σ ως προς τον άξονα περιστροφής z, συνεπώς η στροφορμή, ως προς τον άξονα αυτόν, παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow I_{\tau}\omega_0=I_s\omega_1\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0=\left(\frac{1}{2}MR^2+mx^2\right)\omega_1\rightarrow$$

$$\omega_0=\frac{(MR^2+2mx^2)\omega_1}{MR^2}=\frac{(19{,}5\cdot 0{,}4^2+2\cdot 1\cdot 0{,}2^2)}{19{,}5\cdot 0{,}4^2}3rad/s\approx 3{,}08rad/s$$

Συνεπώς το τραπέζι στρέφεται κατά γωνία $\theta=\omega_0 t_1=3{,}08\cdot\frac{\pi}{20}rad\approx 0{,}48rad$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης