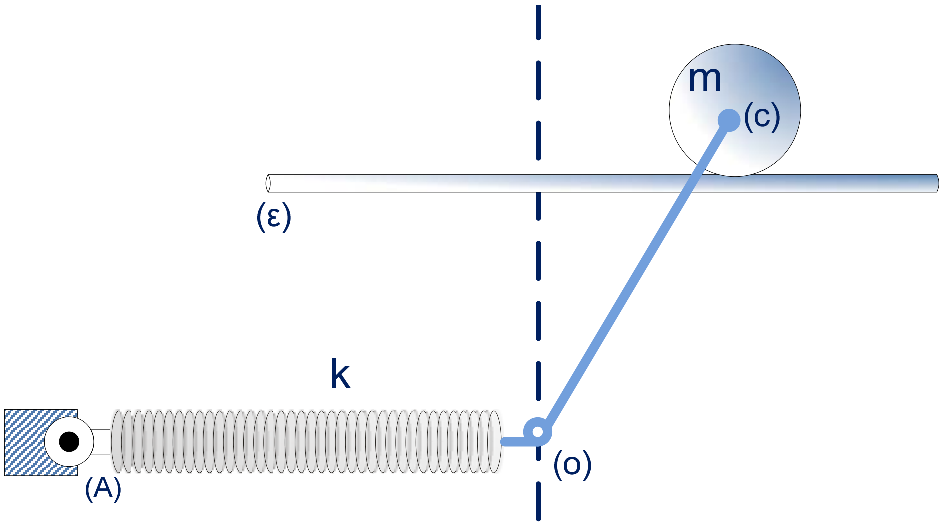
Κυλιόμενος Ομογενής Κυκλικός Δίσκος
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Κατά μήκος οριζόντιας ευθείας (ε), μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ομογενής κυκλικός δίσκος μάζας m και ακτίνας R. Το κέντρο (c) του δίσκου συνδέεται με σταθερό σημείο Α, μέσω εκτατού νήματος (γραμμικό ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ_0=(ΑΟ)), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον το νήμα διέρχεται από σταθερό δακτύλιο (ο).



Εάν απομακρύνουμε τον κυκλικό δίσκο από τη θέση ισορροπίας του κατά x_0 και τη χρονική στιγμή t=0 τον αφήσουμε ελεύθερο, να δείξετε ότι το κέντρο του δίσκου θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση περί της κατακόρυφου που διέρχεται από το δακτύλιο ο. Επίσης να βρεθούν:

α) η περίοδος της ταλάντωσης.

β) η εξίσωση της απομάκρυνσης του κέντρου του κυκλικού δίσκου από τη θέση ισορροπίας ως συνάρτηση του χρόνου.

γ) η χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής, της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

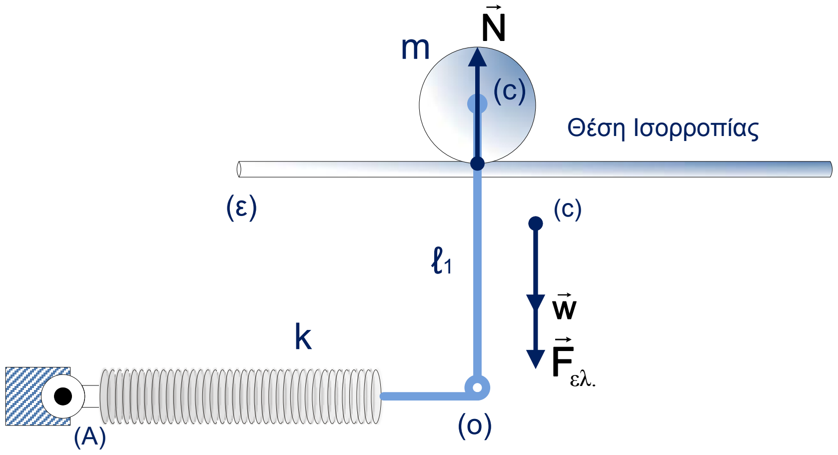
δ) η στροφική, μεταφορική και ολική κινητική ενέργεια του κυκλικού δίσκου ως συνάρτηση του χρόνου.

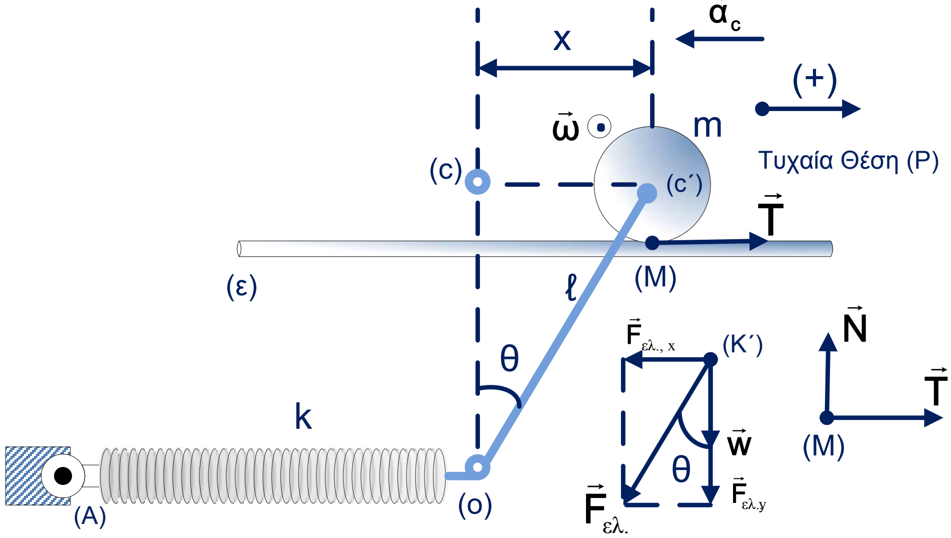
ε) ο λόγος της στροφικής προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του δίσκου.

στ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής, μεταφορικής και ολικής κινητικής ενέργειας, όταν ο δίσκος διέρχεται από τη θέση $x=x_0/2$.

Δίνεται $\mathbf{I_c = \frac{1}{2} mR^2}$

Απάντηση:





Αρχικά το κέντρο του κυκλικού δίσκου βρίσκεται σε απόσταση x_0 από τη θέση ισορροπίας (u_c=0). Την χρονική στιγμή t=0s αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αρχίζει να κινείται.

- Στην τυχαία θέση (P), όπου ο κυκλικός δίσκος κινείται προς τα αριστερά και το κέντρο του βρίσκεται σε απόσταση x δεξιά από τη θέση ισορροπίας (θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά), θα έχουμε:

$$\Sigma F = T - F_{\varepsilon\lambda.,x} \Rightarrow \Sigma F = T - F_{\varepsilon\lambda.}\eta\mu\theta \Rightarrow \Sigma F = T - \kappa\ell\eta\mu\theta \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = T - kx} \ \ (\mathbf{1})$$

(η επιμήκυνση του νήματος στην τυχαία θέση (P)⇒ είναι ℓ=(oc') διότι το φυσικό του μήκος είναι ℓ_0=(AO),*από το σχήμα ℓημθ = x)*

- Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma\tau = I_c \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T \cdot R = I_c \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \xrightarrow{I_c=\frac{1}{2}mR^2} T \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu.} \xrightarrow{\alpha_c=\alpha_{\gamma\omega\nu.}\cdot R} \mathbf{T} = \frac{\mathbf{m\alpha_c}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \mathbf{m\alpha_c} = \mathbf{2T} \ \ (\mathbf{2})$$

(η μονή δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο (c) του δίσκου, είναι η δύναμη της τριβής, της οποίας η φορά φαίνεται το σχήμα)

- Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_c \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.,x} - T = m \cdot \alpha_c \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.}\eta\mu\theta - T = m \cdot \alpha_c \overset{(2)}{\Rightarrow} F_{\varepsilon\lambda.}\eta\mu\theta - T = 2T$$

$$\Rightarrow \kappa\ell\eta\mu\theta = 3T \xrightarrow{\ell\eta\mu\theta = x} \mathbf{kx = 3T \Rightarrow T = \frac{kx}{3}\ (3)}$$

- Τελικά από τις σχέσεις (1) και (3) θα έχουμε:

$$\Sigma F = T - kx \Rightarrow \Sigma F = \frac{kx}{3} - kx \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -\frac{2k}{3}x\ (4)}$$

Αφού η συνισταμένη δύναμη **ΣF** είναι της μορφής **-D·x,** το σύστημα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση (**Α.Α.Τ.**), με σταθερά επαναφοράς:

$$\mathbf{D = \frac{2k}{3}}$$

α) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \xrightarrow{D=\frac{2k}{3}} \mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}}$$

β) την χρονική στιγμή τιμή t=0 ο δίσκος βρίσκεται στη θέση $x=x_0$ και έχει ταχύτητα $u_c=0$ ⇒ αρά το πλάτος της ταλάντωσης είναι $\mathbf{A=x_0}$.

Έστω ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $\mathbf{x = x_0\eta\mu(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \varphi_0)}$

(Όπου $\omega_{\tau\alpha\lambda.}$ είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης και φ_0 η αρχική φάση)

Από την (5), για **t=0** και $\mathbf{x=x_0}$ θα έχουμε:

$$x = x_0\eta\mu(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0, x=x_0} x_0 = x_0\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 \le 2\pi}$$

$$\Rightarrow 0 \le 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{2} \le 2\kappa \le \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{3}{4} \xRightarrow{\kappa\in\mathbb{Z}} \mathbf{\kappa = 0}$$

Άρα

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xRightarrow{\kappa=0} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}} \text{ και } \mathbf{x = x_0\eta\mu\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ (5)}$$

όπου

$$\boldsymbol{\omega_{\tau\alpha\lambda.} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}}\ \mathbf{(6)}, \qquad \left(D = m\omega_{\tau\alpha\lambda.}^2 \xRightarrow{D=\frac{2k}{3}} \frac{2k}{3} = m\omega_{\tau\alpha\lambda.}^2\right)$$

γ) η ταχύτητα του κέντρου του κυκλικού δίσκου δίνεται από την σχέση:

$$u_c = \omega \cdot R \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \frac{u_c}{R}}\ \mathbf{(7)}$$

Επιπλέον η χρονική εξάρτηση της ταχύτητας του κέντρου του δίσκου, δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u_c = \omega_{\tau\alpha\lambda.}x_0\sigma\upsilon\nu\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ (8)}$$

Τελικά με συνδυασμό των σχέσεων (7) και (8), προκύπτει η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξάρτηση της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\omega_{\tau\alpha\lambda.}x_0}{R}\sigma\upsilon\nu\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ \ (9)}$$

δ) Στροφική κινητική ενέργεια:

$$K_{\sigma\tau\rho o\varphi.} = \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \overset{(7)}{\Rightarrow} K_{\sigma\tau\rho o\varphi.} = \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{u_c}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow K_{\sigma\tau\rho o\varphi.} = \frac{1}{4}mu_c^2 \overset{(8)}{\Rightarrow} K_{\sigma\tau\rho o\varphi.} = \frac{1}{4}m\omega_{\tau\alpha\lambda.}^2 x_0^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ \ (10)}$$

Μεταφορική κινητική ενέργεια:

$$\boldsymbol{K_{\mu\varepsilon\tau.} = \frac{1}{2}mu_c^2 \overset{(8)}{\Rightarrow} K_{\mu\varepsilon\tau.} = \frac{1}{2}m\omega_{\tau\alpha\lambda.}^2 x_0^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ \ (11)}$$

Ολική κινητική Ενέργεια:

$$K_{o\lambda.} = K_{\mu\varepsilon\tau.} + K_{\sigma\tau\rho o\varphi.} = \frac{1}{2}mu_c^2 + \frac{1}{4}mu_c^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{K_{o\lambda.} = \frac{3}{4}mu_c^2 \overset{(8)}{\Rightarrow} K_{o\lambda.} = \frac{3}{4}m\omega_{\tau\alpha\lambda.}^2 x_0^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega_{\tau\alpha\lambda.}t + \frac{\pi}{2}\right)\ \ (12)}$$

ε) ο λόγος της στροφικής, προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια είναι:

$$\boldsymbol{\frac{K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}}{K_{\mu\varepsilon\tau.}} = \frac{\frac{1}{4}mu_c^2}{\frac{1}{2}mu_c^2} = \frac{1}{2}}$$

*(Σχόλιο! Σε ένα σώμα που κυλίεται ο λόγος, **$K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}/K_{\mu\varepsilon\tau.}$** είναι σταθερός και ίσος με τον αριθμητικό συντελεστή του τύπου που μας παρέχει τη ροπή αδράνειας του σώματος)*

στ) Ρυθμός μεταβολής στροφικής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma\tau}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Sigma\tau\cdot\theta)}{\Delta t} = \Sigma\tau\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \Sigma\tau\cdot\omega = T\cdot R\cdot\omega \overset{(7)}{\Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}}{\Delta t} = T\cdot u_c \xrightarrow{\Sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \iota\sigma o\rho.\Rightarrow T=0,\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ x=0,(3)} \frac{\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}}{\Delta t} = 0}$$

Ρυθμός μεταβολής μεταφορικής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau.}}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Sigma F\cdot x)}{\Delta t} = \Sigma F\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} = \Sigma F\cdot u_c \xrightarrow{\Sigma F = m\alpha_c} \frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau.}}{\Delta t} = m\alpha_c u_c \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau.}}{\Delta t} = 2T\cdot u_c \xrightarrow{\Sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \iota\sigma o\rho.\Rightarrow T=0,\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ x=0,(3)} \frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau.}}{\Delta t} = 0}$$

Ρυθμός μεταβολής ολικής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\Delta K_{o\lambda.}}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{\sigma\tau\rho o\varphi.}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau.}}{\Delta t} = \Sigma\tau\cdot\omega + \Sigma F\cdot u_c = \boldsymbol{T\cdot u_c + 2T\cdot u_c} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta K_{ολ.}}{\Delta t} = 3T \cdot u_c \xrightarrow{\text{Στη θέση ισορ.} \Rightarrow T=0, αφού\ x=0,(3)} \frac{\Delta K_{ολ.}}{\Delta t} = 0$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής