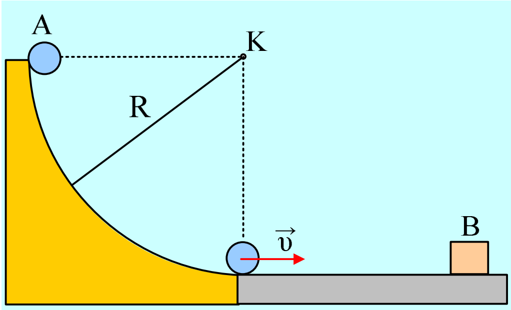
Κρούση μιας σφαίρας με κύβο.



Από την κορυφή ενός λείου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R=2,5m, αφήνεται να ολισθήσει μια σφαίρα Α μάζας Μ=0,3kg και ακτίνας r=5cm, η οποία φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ. Η σφαίρα παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}2$ και αφού κινηθεί επί χρονικό διάστημα Δt=2s, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο κύβο ακμής α=0,1m και μάζας m=0,2kg.

i) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας υ, με την οποία αρχίζει να κινείται η σφαίρα στο οριζόντιο επίπεδο.

ii) Ποια η ταχύτητα της σφαίρας ελάχιστα πριν την κρούση.

iii) Πόσο απέχει ο κύβος Β από την βάση του τεταρτοκυκλίου;

iv) Με δεδομένο ότι η δύναμη που ασκείται από τη σφαίρα στον κύβο στη διάρκεια της κρούσης είναι οριζόντια, να βρεθεί το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που μεταφέρεται στον κύβο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της $I=\frac{2}{5}R^2$ και $g=10m/s^2$.

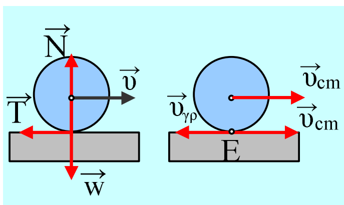
Απάντηση:

i) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο της σφαίρας, στο οριζόντιο επίπεδο. Αφού το τεταρτοκύκλιο είναι λείο, η σφαίρα εκτελεί μεταφορική κίνηση χωρίς να περιστρέφεται, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή, κατά την κίνησή της. Η μηχανική ενέργεια κατά την παραπάνω κίνηση παραμένει σταθερή:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow Mg(R-r)=\frac{1}{2}M\upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{2g(R-r)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot(2{,}5-0{,}05)}m/s=7m/s$$

ii) Μόλις η σφαίρα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο, θα δεχτεί δύναμη τριβής ολίσθησης, όπως στο σχήμα, η οποία αφενός θα μειώσει το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας, επιβραδύνοντας την μεταφορική κίνηση, αφετέρου θα περιστρέψει τη σφαίρα, σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, προκαλώντας μέσω της ροπής της, γωνιακή επιτάχυνση. Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε, δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών:



$$\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow T=M\alpha_{cm} \rightarrow \mu Mg=M\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm}=\mu g=2\ m/s^2.$$

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{γων} \rightarrow T\cdot R=\frac{2}{5}MR^2\alpha_{γων} \rightarrow \mu g=\frac{2}{5}R\alpha_{γων} \rightarrow R\alpha_{γων}=2{,}5\mu g=5m/s^2.$$

Εστιάζοντας την προσοχή μας στο σημείο Ε, το σημείο επαφής της σφαίρας με το επίπεδο, αυτό έχει μια ταχύτητα προς τα δεξιά ίση με υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{γρ}=\omega\cdot R$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του, που οφείλεται στην περιστροφή της σφαίρας, προς τ' αριστερά. Η παραπάνω κίνηση πραγματοποιείται μέχρι τη στιγμή που θα εξισωθούν τα μέτρα των παραπάνω ταχυτήτων, οπότε η σφαίρα θα αρχίσει να κυλίεται και η τριβή θα μηδενιστεί.

$$\upsilon_E=0 \rightarrow \upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow \upsilon-\alpha_{cm}\cdot t=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t\cdot R \rightarrow 7-2t=5t \rightarrow t=1s$$

Αλλά τη στιγμή αυτή η σφαίρα έχει $\upsilon_{cm}= \upsilon-\alpha_{cm}\cdot t=7m/s-2\cdot 1m/s=5m/s$.

iii) Η σφαίρα, τη στιγμή $t_1=1s$ που σταματά η ολίσθησή της, έχει διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο απόσταση $\Delta x_1=\upsilon\cdot t- ½\, \alpha_{cm}\cdot t^2=(7\cdot 1- ½ \cdot 2\cdot 1)m=6m$, έχοντας αποκτήσει σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας 5m/s. Με την ταχύτητα αυτή θα κινηθεί για χρονικό διάστημα $t_2=\Delta t-t_1=1s$, διανύοντας απόσταση $\Delta x_2=\upsilon_{cm}\cdot t_2=5\cdot 1m=5m$, μέχρι να συγκρουσθεί με τον κύβο. Συνεπώς ο κύβος απέχει από την βάση του τεταρτοκυκλίου απόσταση:

$$D=\Delta x_1+\Delta x_2= 11m.$$

iv) Η δύναμη μεταξύ των σωμάτων στη διάρκεια της κρούσης, είναι οριζόντια, συνεπώς δεν θα ασκηθεί ροπή στη σφαίρα, με αποτέλεσμα η γωνιακή της ταχύτητα να παραμείνει σταθερή. Συνεπώς για την ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύουν οι γνωστές μας εξισώσεις, από όπου παίρνουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{M-m}{M+m}\upsilon_{cm}=\frac{0,3-0,2}{0,3+0,2}5m/s=1m/s \text{ και } \upsilon_2'=\frac{2M}{M+m}\upsilon_{cm}=\frac{2\cdot 0,3}{0,3+0,2}5m/s=6m/s$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi=\frac{K_{\kappa\upsilon\beta}}{K_{\alpha\rho\chi-\sigma\varphi}}100\%=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2}100\%=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega^2}100\% \rightarrow$$

$$\pi=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2}{\frac{7}{10}M\upsilon_{cm}^2}100\%=\frac{5\cdot 0,2\cdot 6^2}{7\cdot 0,3\cdot 5^2}100\%=68,6\%$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης