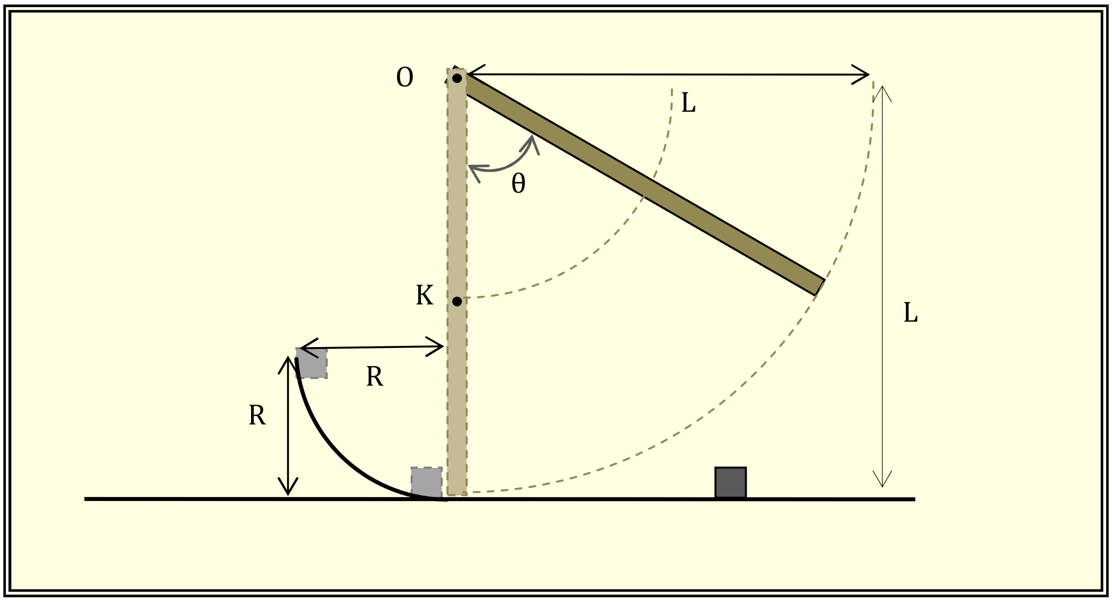
Κρούση και στροφική κίνηση

Η ομογενής ράβδος μήκους $\mathbf{L}$ μπορεί να στρέφεται **χωρίς τριβές** γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος ο οποίος διέρχεται από το σημείο **O**. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα χωρίς να αγγίζει το οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα σχήματος κύβου αφήνεται από την κορυφή της τεταρτοκυκλικής ράμπας ακτίνας **R** πάνω στην οποία ολισθαίνει **χωρίς τριβές**. Στο κατώτερο σημείο της ράμπας το σώμα συγκρούεται **ελαστικά** με το κάτω άκρο της ράβδου. Το βάρος του σώματος είναι $\mathbf{B = 80N}$ και είναι **το ίδιο** με το βάρος της ράβδου. Η ακμή του κύβου είναι ασήμαντη σε σχέση με το μήκος της ράβδου και επίσης $\mathbf{L = 3R}$.



1. Βρείτε τη μέγιστη γωνία $\boldsymbol{\theta}$ που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφη κατά την κίνηση της μετά την κρούση.
2. Τι κατεύθυνση θα έχει η ταχύτητα του σώματος **αμέσως μετά** την κρούση;
3. Υπολογίστε τη δύναμη που ο άξονας ασκεί στη ράβδο τη στιγμή που αυτή βρίσκεται στη θέση μέγιστης γωνιακής απομάκρυνσης από την κατακόρυφη.

Δίδεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O είναι $\mathbf{I_{(O)} = \frac{1}{3}mL^2}$ όπου $\mathbf{m}$ η μάζα της ράβδου.

Απάντηση

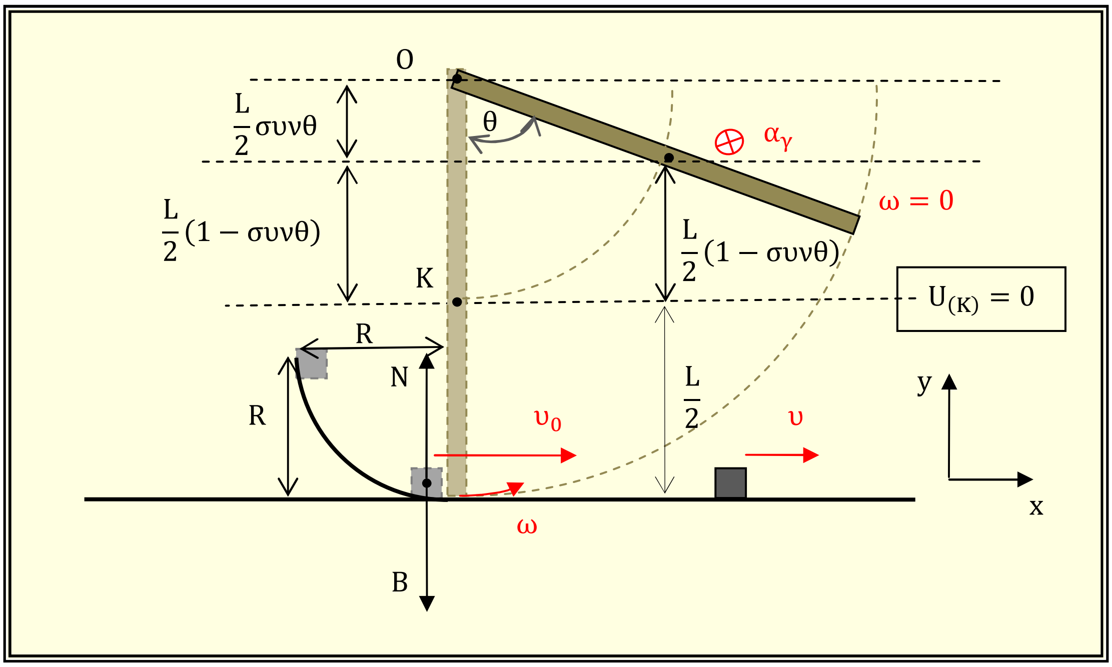
1.

Κατά την κίνηση του σώματος επί του τεταρτοκύκλιου επειδή δεν υπάρχουν τριβές η αντίδραση που το σώμα δέχεται από αυτό είναι διαρκώς κάθετη στην τροχιά του. Αυτό έχει σα συνέπεια η μόνη δύναμη που δέχεται το σώμα από το περιβάλλον της οποίας το έργο συμμετέχει στην ενεργειακή διακίνηση – μετατροπή είναι το βάρος (συντηρητική). Δηλαδή διατηρείται η μηχανική ενέργεια του σώματος. Οπότε

$$\frac{1}{2}m{\upsilon_0}^2 = mgR \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\upsilon_0 = \sqrt{2gR}} \qquad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης:



Η ροπές των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{B}$ **επί του σώματος** είναι πρακτικά μηδέν αφού ο φορέας τους σχεδόν διέρχεται από το O).

Για τις εξωτερικές δυνάμεις **επί της ράβδου** έχουμε ότι, η ροπή της δύναμης του άξονα ως προς τον άξονα είναι μηδέν όπως επίσης μηδέν είναι και η ροπή του βάρους της ράβδου (κατά τη μικρή διάρκεια της κρούσης η ράβδος ουσιαστικά διατηρείται κατακόρυφη με συνέπεια ο φορέας του βάρους της να διέρχεται από τον άξονα). Δηλαδή **η στροφορμή του συστήματος σώματος – ράβδου**, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O, **λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση είναι η ίδια**. Έτσι

$$m\upsilon_0 L = m\upsilon L + \frac{1}{3}mL^2\omega \Rightarrow$$

$$\upsilon_0 = \upsilon + \frac{1}{3}L\omega \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\upsilon_0 - \upsilon = R\omega} \qquad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική δεν αλλάζει ένεκα αυτής η μηχανική ενέργεια του συστήματος οπότε

$$-mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}m{\upsilon_0}^2 = -mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \Rightarrow$$

$${\upsilon_0}^2 = \upsilon^2 + \frac{1}{3}9R^2\omega^2 \Rightarrow$$

$${\upsilon_0}^2 - \upsilon^2 = 3R^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$(\upsilon_0 - \upsilon)(\upsilon_0 + \upsilon) = 3R^2\omega^2 \qquad (3)$$

Αλλά κατά τη διάρκεια της κρούσης επί του σώματος ασκείται μη μηδενική δύναμη από τη ράβδο δηλαδή η ορμή του σώματος μεταβάλλεται κατά την κρούση ($m\upsilon \neq m\upsilon'$). Με δεδομένο τώρα ότι η μάζα m έχει πεπερασμένη τιμή το παραπάνω συνεπάγεται ότι $\upsilon \neq \upsilon'$ και από την (2) $\omega \neq 0$. Έτσι από (2) και (2) παίρνουμε διαδοχικά

$$R\omega(\upsilon_0 + \upsilon) = 3R^2\omega^2$$

$$\boldsymbol{\upsilon_0 + \upsilon = 3R\omega} \qquad (4)$$

Από τις (2), (4) με πρόσθεση έχουμε $2\upsilon_0 = 4R\omega$ και με τη βοήθεια της (2)

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\upsilon_0}{2R} = \sqrt{\frac{g}{2R}}} \qquad (5)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κατακόρυφη θέση της ράβδου (αμέσως μετά τη κρούση) και την θέση όπου στιγμιαία μηδενίζεται η ταχύτητα της έχουμε

$$mg\frac{L}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cdot 3}mL^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$g(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{1}{3}L\omega^2 = R\omega^2$$

και με τη βοήθεια της (5)

$$g(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{g}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

2.

Από (2), (4) και (5) παίρνουμε

$$\boldsymbol{\upsilon = R\omega = \sqrt{\frac{gR}{2}} = \frac{\sqrt{2gR}}{2} = \frac{\upsilon_0}{2}} > 0$$

Δηλαδή το σώμα αμέσως μετά την κρούση **θα συνεχίσει κινούμενο προς τα δεξιά** με το ήμισυ της ταχύτητας που αυτό είχε πριν την κρούση.

3.

Τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μηδενίζεται

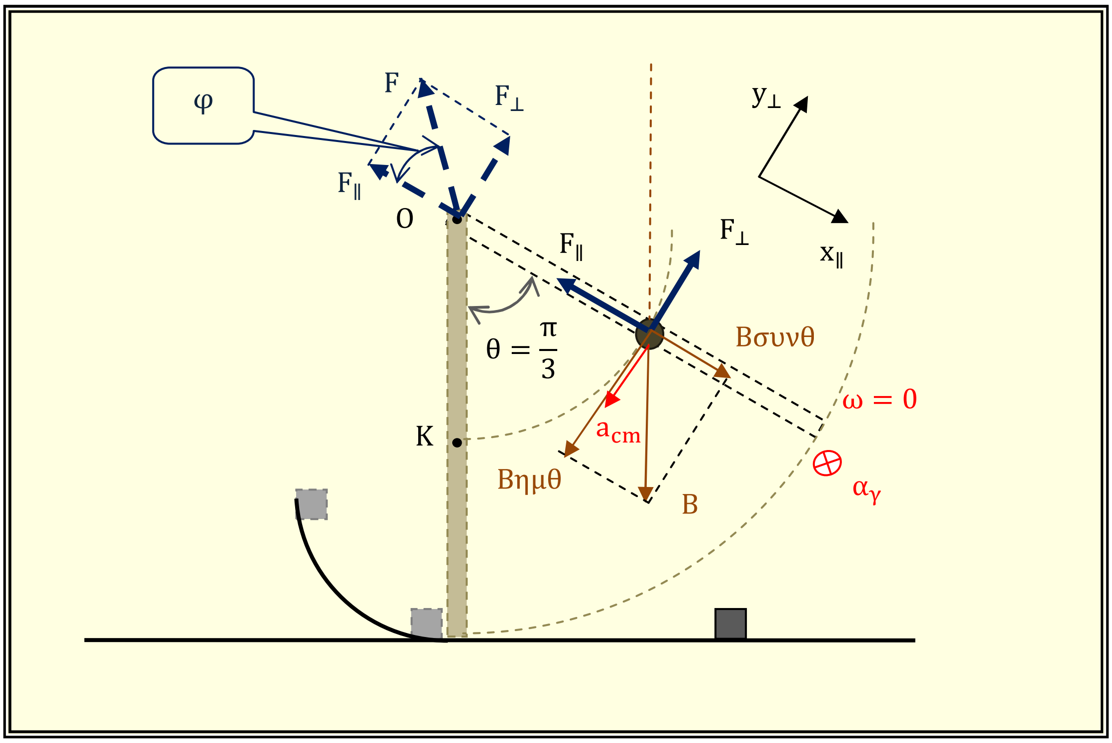
$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)}\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$B\eta\mu\theta\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{3B\sqrt{3}}{4L} = m\alpha_\gamma \qquad (6)$$

Θα αναφερθούμε στην κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου μετά την κρούση. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε όλη τη μάζα της ράβδου συγκεντρωμένη στο κέντρο της που είναι και το κέντρο μάζας της και επίσης μεταφέρουμε την δύναμη του άξονα παράλληλα και έτσι ώστε το σημείο εφαρμογής της να συμπέσει με το κέντρο της ράβδου. Η τροχιά του κέντρου μάζας θα είναι κυκλική κέντρου Ο και ακτίνας

$$\frac{L}{2}=\frac{3R}{2}$$



Για το υλικό σημείο που έχει προκύψει στη θέση του κέντρου της ράβδου τη στιγμή που μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου έχουμε

$$\Sigma F_{x_\parallel}=F_\kappa=\frac{m{v_{cm}}^2}{\frac{L}{2}}=0\ \Rightarrow$$

$F_\parallel-B\eta\mu\theta=0\ \Rightarrow$

$$\mathbf{F_\parallel=B\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{B}{2}=40N}$$

$\Sigma F_{x_\perp}=ma_{cm}=m\frac{L}{2}\alpha_\gamma$ και με τη βοήθεια της (6)

$$B\eta\mu\theta-F_\perp=\frac{3B\sqrt{3}}{8}\Rightarrow\frac{B\sqrt{3}}{2}-F_\perp=\frac{3B\sqrt{3}}{8}\Rightarrow$$

$$\mathbf{F_\perp=\frac{B\sqrt{3}}{8}=10\sqrt{3}\,N}$$

Και σε πολική μορφή

$$F=\sqrt{{F_\parallel}^2+{F_\perp}^2}$$

$$\mathbf{F = 10\sqrt{19}N}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi} = \frac{F_{\perp}}{F_{\parallel}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}$$

Επισήμανση για τους εξεταζόμενους

Είναι πιθανόν επειδή στα περισσότερα προβλήματα δίνεται η τιμή του g ένας υποψήφιος ακόμα και αν δεν δίνεται, όπως συμβαίνει εδώ, να το θεωρήσει δεδομένο, να πάρει επί παραδείγματι $g = 10\frac{m}{s^2}$ και να λύσει το πρόβλημα. ***Αυτό δεν επιτρέπεται. Κανένα μέγεθος δεν πρέπει να θεωρείται γνωστό αν δεν δίνεται.***

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Εμμανουήλ Λαμπράκης