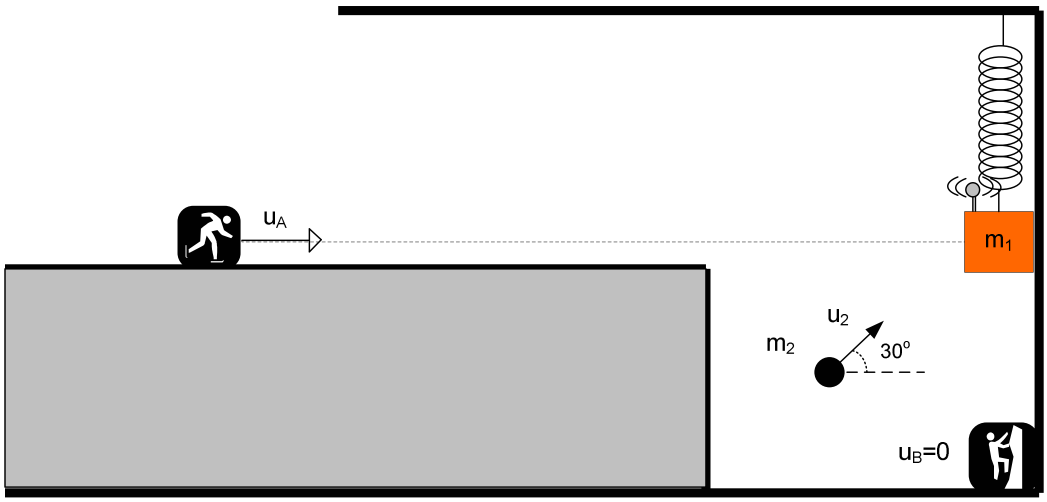
# *Κρούσεις-Ταλαντώσεις –Doppler.*

Σώμα μάζας $m_1$=3 kg είναι δεμένο στην άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατήριου σταθεράς k=100 N/m, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ισορροπεί. Η μία πλευρά του σώματος $m_1$ βρίσκεται σε επαφή με λεία επιφάνεια τοίχου. Επίσης, στο σώμα μάζας $m_1$ είναι εγκατεστημένη συσκευή παραγωγής ηχητικών κυμάτων συχνότητας fs=680 Hz, η οποία έχει αμελητέα μάζα. Σώμα μάζας $m_2$=1 kg συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας $m_1$. Η ταχύτητα του σώματος $m_2$ είναι $u_2 = 4\sqrt{3}\ m/s$ και το διάνυσμα αυτής σχηματίζει γωνία $30^o$ με την οριζόντια διεύθυνση. Ως χρονική στιγμή t=0 θεωρείται αυτή της κρούσης.




Επίσης δύο παρατηρητές (Α) και (Β) αντιλαμβάνονται τον ήχο από την πηγή παραγωγής ηχητικών κυμάτων. Ο παρατηρητής (Α) κινείται σε οριζόντιο επίπεδο η προέκταση του οποίου «περνάει» από την αρχική θέση του σώματος μάζας $m_1$. Η ταχύτητα του παρατηρητή (Α) είναι 3 m/s. Ο παρατηρητής (Β) είναι ακίνητος και βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σώμα μάζας $m_1$.

Δίνεται, επίσης, η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s$^2$ και η ταχύτητα του ήχου $u_{ηχ}$=340 m/s. Θεωρήστε θετική φορά την άνω. Επίσης, μην λάβετε υπόψη τις ανακλάσεις του ήχου.

Να απαντηθούν τα ακόλουθα ζητήματα:

1. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα που θα δημιουργηθεί εκτελεί ΑΑΤ.
2. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ΑΑΤ.
3. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της δύναμης του ελατηρίου και τη μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς.
4. Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται ώστε το συσσωμάτωμα να ακινητοποιηθεί ακαριαία για $2^η$ φορά.
5. Να βρεθεί το έργο του βάρους και το έργο της δύναμης ελατηρίου κατά την προαναφερθείσα κίνηση.
6. Σε ποιες χρονικές στιγμές αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (Β) τον ήχο με την ίδια συχνότητα με αυτή που εκπέμπεται από την πηγή.
7. Ποια η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (Α) τη στιγμή που το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s$ με φορά προς τα κάτω.

**8.** Να γραφεί η εξίσωση της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (Β) σε σχέση με το χρόνο.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

***Δεδομένα***

$m_1$=3 kg

$m_2$=1 kg

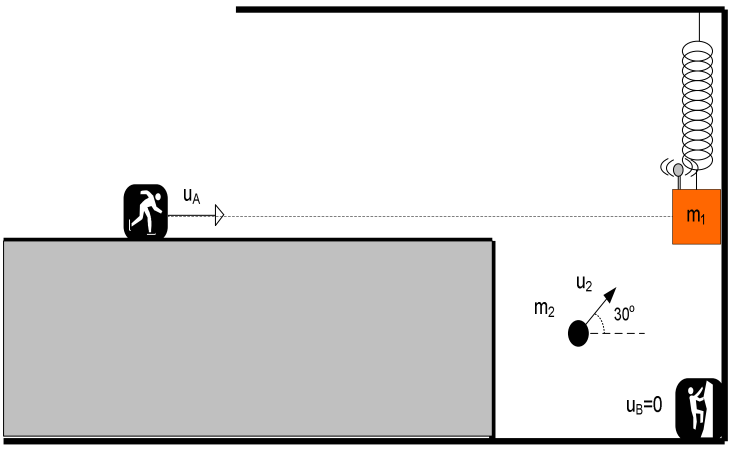
k=100 N/m

fs=680 Hz

$u_2 = 4\sqrt{3}$ m/s g=10 m/s²

$u_{ηχ}$=340 m/s

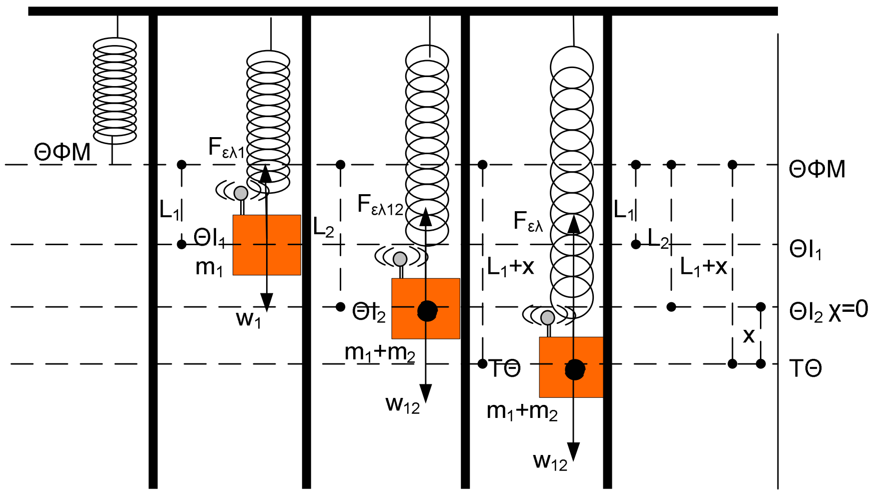
Κρούση πλαστική




## *1ο Ζήτημα:*

Για να αποδείξουμε πως ένα σώμα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ) αρκεί να δείξουμε πως σε μία τυχαία θέση της κίνησής του ισχύει $\Sigma F = -Dx$ .

***Παρατήρηση:*** Αρκεί, δηλαδή, να δείξουμε πως το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα είναι ανάλογο της μετατόπισής του από τη θέση ισορροπίας και πως η συνισταμένη δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από την μετατόπιση. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η συνισταμένη δύναμη αναλόγως της μετατόπισης θα αποτελεί τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.




Σχήμα 1

Σε αυτές τις περιπτώσεις εργαζόμαστε ως εξής: Σχεδιάζουμε όλες τις «απαραίτητες» θέσεις που αφορούν μία ταλάντωση, τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, καθώς, και τις αποστάσεις μεταξύ των θέσεων που έχουν σχεδιασθεί. Οι «απαραίτητες» θέσεις μίας ταλάντωσης είναι η Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) , οι Θέσεις Ισορροπίας (ΘΙ) και η Τυχαία Θέση (ΤΘ) για την οποία θέλουμε να αποδείξουμε πως $\Sigma F = -Dx$ .

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη στην Τυχαία Θέση.

Στην περίπτωση μας:

**ΘΙ₁:** $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow w_1 - F_{\varepsilon\lambda 1} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1} = w_1$ ή $\boxed{kl_1 = m_1 g}$ **(α)** και $\underline{\underline{l_1 = 0,3\ m}}$

**ΘΙ₂:** $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow w_{12} - F_{\varepsilon\lambda 12} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 12} = w_{12}$ ή $\boxed{kl_2 = (m_1 + m_2)g}$ **(β)** και $\underline{\underline{l_2 = 0,4\ m}}$

**ΤΘ:** $\Sigma F = w_{12} - F_{\varepsilon\lambda 12} = (m_1 + m_2)g - k(l_2 + x) \Rightarrow \Sigma F = (m_1 + m_2)g - kl_2 - kx$ και λόγω της **(β)** $\boxed{\Sigma F = -kx}$

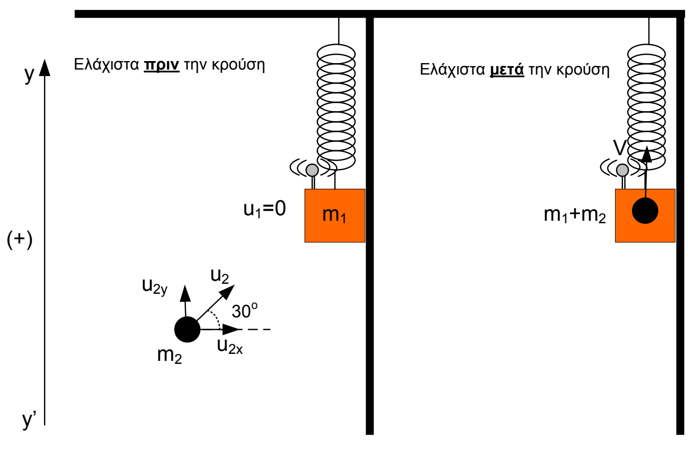
Συνεπώς, η σχέση που διέπει τη συνισταμένη δύναμη σε μία τυχαία θέση της κίνησης είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με D=k. Άρα το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ.

***Παρατήρηση:*** ♪ *Η κάθετη επιφάνεια με την οποία έρχεται σε επαφή το συσσωμάτωμα είναι λεία και ως εκ τούτου δεν λαμβάνεται υπόψιν η δύναμη της τριβής. Σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να περιλάβουμε και την Τ. Σε αυτή την περίπτωση το συσσωμάτωμα δε θα εκτελούσε ΑΑΤ.*

♪ *Χρειάζεται προσοχή στα πρόσημα που χρησιμοποιούμε για τις δυνάμεις κατά τον υπολογισμό της συνισταμένης δύναμης. Ο πιο απλός τρόπος για να μην κάνουμε λάθος είναι ο εξής: Επιλέγουμε ως θετική φορά αυτή της κατεύθυνσης της μετατόπισης του σώματος από τη Θέση Ισορροπίας έως την Τυχαία Θέση. Βάσει αυτής της φοράς επιλέγουμε τα πρόσημα των δυνάμεων. Για παράδειγμα, στην περίπτωσή μας, η μετατόπιση του συσσωματώματος από τη ΘΙ₂ έως την ΤΘ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Συνεπώς, το βάρος (ω) θα θεωρηθεί ως θετικό (+) και η δύναμη του ελατηρίου ($F_{\varepsilon\lambda}$) ως αρνητική (-).*

*Αν δεν προσεχθεί αυτός ο απλός κανόνας θα καταλήγουμε συχνά σε λάθη.*

**2ο Ζήτημα:**




Σχήμα 2

Αρχικώς πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για τον άξονα y'y.

Άρα <u>ΑΔΟ</u>

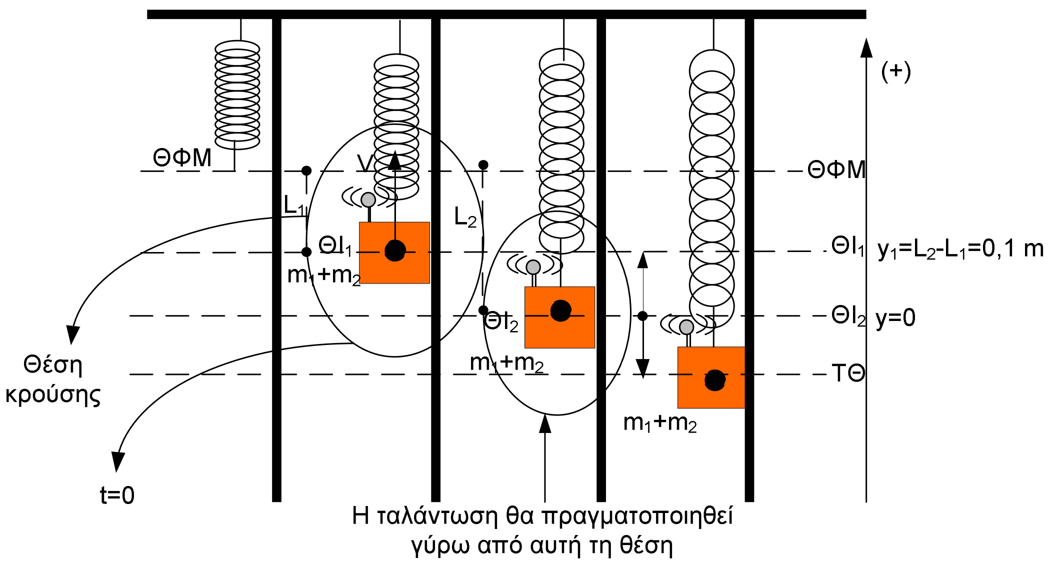
$$\overrightarrow{p_{ολ.\,αρχ}} = \overrightarrow{p_{ολ.\,τελ}}$$

$$m_2 u_{2y} + 0 = (m_1 + m_2)V \; (☺)$$

$$\text{με } u_{2y} = u_2 ημ30^o \Rightarrow u_{2y} = 4\sqrt{3}\frac{1}{2}\ m/s \Rightarrow u_{2y} = 2\sqrt{3}\ m/s$$

$$\text{Άρα } (☺)\ 1\cdot 2\sqrt{3} = (3+1)V \quad \text{ή} \quad \boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s}$$

Συνεπώς το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει ΑΑΤ γύρω από τη $ΘΙ_2$ και την χρονική στιγμή t=0 θα έχει ταχύτητα $V = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s$ προς τα θετικά (προς τα πάνω) ενώ βρίσκεται στη θέση $y_1$=+0,1 m. Για να γίνουν κατανοητά αυτά θα πρέπει να συμβουλευτούμε το ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 3).




Σχήμα 3

Καθώς, λοιπόν, την t=0 έχουμε y≠0 συμπεραίνουμε πως η ΑΑΤ έχει αρχική φάση $φ_o$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης θα δίνεται από την εξής σχέση: $\boxed{y = A\cdot ημ(ωt+φ_o)}$

**Υπολογισμός Α:** Για να υπολογίσουμε το πλάτος (Α) της ταλάντωσης όταν γνωρίζουμε για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή την απομάκρυνση (y) από τη Θ.Ι. και την ταχύτητα (u) είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της Ταλάντωσης (ΑΔΕΤ).

Συνεπώς, για την περίπτωση που μελετάμε:

<u>ΑΔΕΤ</u> για την t=0

$$\underline{\underline{E = K + U}}$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$100A^2 = (3+1)(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 100 \cdot 0,1^2 \Rightarrow A^2 = \frac{4\frac{3}{4}+1}{100} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{100}}\ m$$

ή $\boxed{A = 0,2\ m}$. Συνεπώς τη στιγμή t=0 το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $y_1 = +\frac{A}{2}\ m$

**Υπολογισμός ω:** Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$ και, ως εκ τούτου, $T = 2\pi\sqrt{\frac{3+1}{100}}$ s ή $\boxed{T = 0,4\pi\ s}$

Η γωνιακή συχνότητα (ω) της ταλάντωσης σχετίζεται με την περίοδο (Τ) της ταλάντωσης βάσει της εξίσωσης: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και, έτσι, $\boxed{\omega = 5\ rad/s}$

***Παρατήρηση:*** Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}},$$

η οποία προκύπτει από τον τύπο της σταθεράς επαναφοράς $D = m\omega^2$ (στην περίπτωσή μας D=k). Επίσης η προαναφερθείσα σχέση για τη γωνιακή συχνότητα μπορεί να εξαχθεί από τη σχέσεις $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$.

**Υπολογισμός $\varphi_o$:** Για να βρούμε την αρχική φάση της ταλάντωσης εργαζόμαστε με την εξίσωση απομάκρυνσης της ΑΑΤ, θέτοντας στη σχέση που τη διέπει το χρόνο (στην περίπτωση μας t=0) και την απομάκρυνση (y) για τη δεδομένη χρονική στιγμή. Η κατεύθυνση της ταχύτητας χρησιμεύει για τον καθορισμό της επιλογής της «σωστής» αρχικής φάσης.

Στην περίπτωση που μελετάμε, το συσσωμάτωμα την t=0 βρίσκεται στη θέση y=+A/2 με u>0.

Συνεπώς, θέτοντας τις τιμές αυτές, στην εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε:

$$\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Συνεπώς: } \varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_o = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Όμως } \varphi_o \in [0, 2\pi) \text{ και άρα } \boxed{\varphi_o = \frac{\pi}{6}} \text{ ή } \boxed{\varphi_o = \frac{5\pi}{6}}$$

Για $\varphi_o = \frac{\pi}{6}$ έχουμε u>0 αφού $u = u_{max} \cdot συν(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} u_{max}$

Για $\varphi_o = \frac{5\pi}{6}$ έχουμε u<0 αφού $u = u_{max} \cdot συν(\omega \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow u = -\frac{\sqrt{3}}{2} u_{max}$

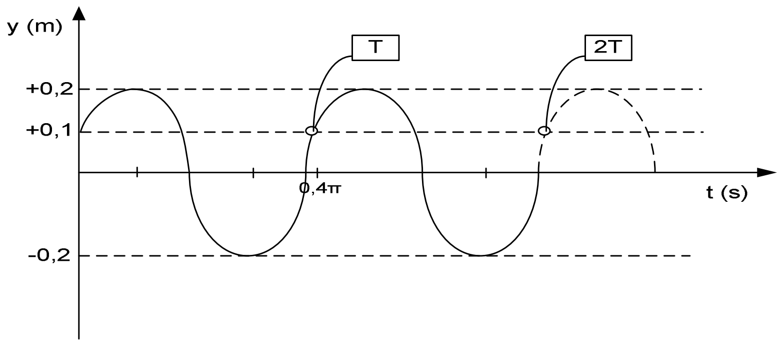
Συνεπώς δεκτή τιμή είναι η $\boxed{\varphi_o = \frac{\pi}{6}}$

Κατόπιν όλων των ανωτέρων έχουμε καθορίσει όλες τις αναγκαίες παραμέτρους της εξίσωσης της απομάκρυνσης της ΑΑΤ.

Συνεπώς, η εξίσωση αυτής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y = 0,2 \cdot ημ(5t + \frac{\pi}{6})} \text{ (SI)}$$

**Παρατήρηση:** Η γραφική παράσταση της προαναφερθείσας εξίσωσης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.




**Σχήμα 4**

**3ο Ζήτημα:**

Η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς είναι $F_{max} = DA$. Συνεπώς στην περίπτωσή μας:

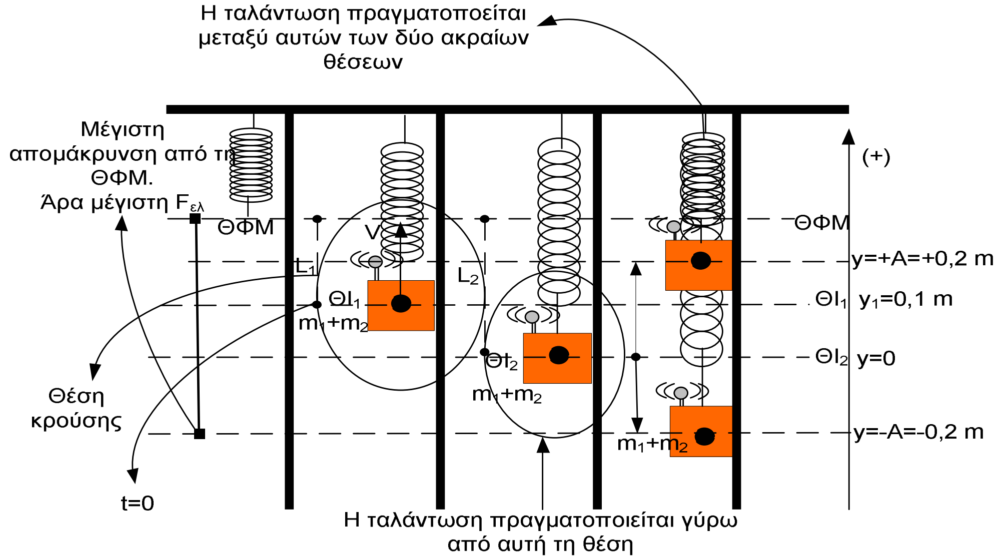
$$F_{max} = kA \Rightarrow F_{max} = 100 \cdot 0,2 \text{ N ή } \underline{F_{max} = 20 \text{ N}}$$

Η μέγιστη τιμή της δύναμης ελατηρίου:

$$F_{ελ,max} = k(l_2 + A) \Rightarrow F_{ελ,max} = 100(0,4 + 0,2) \text{ N} \quad \text{ή} \quad \underline{F_{ελ,max} = 60 \text{ N}}$$

**Παρατήρηση:** Προσοχή: Η δύναμη επαναφοράς (F) υπολογίζεται από τη Θέση Ισορροπίας (ΘΙ). Από την άλλη, **η δύναμη ελατηρίου υπολογίζεται από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ).** Αυτές οι δύο θέσεις συμπίπτουν στην περίπτωση που η ταλάντωση μέσω του ελατηρίου πραγματοποιείται στο οριζόντιο επίπεδο και δεν ασκείται άλλη δύναμη εκτός της $F_{ελ}$ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης. Σε αυτή την περίπτωση η $F_{ελ}$ και η $F_{επαν}$ λαμβάνουν ίδιες τιμές κάθε στιγμή (είναι, δηλαδή, ίσες). Σε κάθε άλλη περίπτωση δεν είναι ίσες και θα πρέπει να δίνεται προσοχή κατά τον υπολογισμό της $F_{ελ}$ (για την $F_{επαν}$ είναι πολύ απλός ο υπολογισμός της: βρίσκω απομάκρυνση από τη ΘΙ και τη θέτω στη σχέση $F = -Dx$).

Στην άσκηση που μελετάμε η ταλάντωση πραγματοποιείται γύρω από τη $ΘΙ_2$ και, ως εκ τούτου, η μέγιστη απομάκρυνση (στην περίπτωσή μας επιμήκυνση) από τη ΘΦΜ είναι $l_2$+A. Το ακόλουθο σχήμα είναι πολύ κατατοπιστικό για τα προαναφερθέντα.




**Σχήμα 5**

**4^ο Ζήτημα:**

Ζητείται η χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για 2^η φορά. Από το Σχήμα 5 γίνεται αντιληπτό πως αυτό θα λάβει χώρα όταν το συσσωμάτωμα φτάσει στην Κάτω Ακραία Θέση (ΚΑΘ) (y=-A) για 1^η φορά. Αναλυτικότερα: Το συσσωμάτωμα την t=0 βρίσκεται στη θέση $y_1$=+0,1 m και κινείται προς τα θετικά (άνω). Συνεπώς, σε χρονικό διάστημα Δt<T/4 θα φτάσει στην Άνω Ακραία Θέση (ΑΑΘ) και θα σταματήσει στιγμιαία για 1^η φορά. Στη συνέχεια θα κινείται προς τα κάτω. Αρχικά θα κινείται επιταχυνόμενα και στη συνέχεια, αφού περάσει τη $ΘΙ_2$ (ΘΙ ταλάντωσης) θα επιβραδύνεται έως ότου φτάσει στην ΚΑΘ και σταματήσει στιγμιαία για 2^η φορά. Συνεπώς, ζητείται να βρούμε τη χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση y=-A για 1^η φορά

**<u>Παρατήρηση:</u>** Υπενθυμίζεται πως η ταχύτητα ενός σώματος που ταλαντώνεται είναι 0 στις ακραίες θέσεις και μέγιστη στη ΘΙ.

Για να βρούμε το χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί ένα σώμα που εκτελεί ΑΑΤ σε μία συγκεκριμένη θέση μπορούμε να εργαστούμε με 2 τρόπους:

**1^ος τρόπος:** Θέτουμε στην εξίσωση της απομάκρυνσης τη θέση την οποία αφορά η χρονική στιγμή και τη λύνουμε προσέχοντας στην επιλογή της «σωστής» χρονικής στιγμής.

Συνεπώς για y=-A η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$-A = A \cdot ημ(5t + \frac{π}{6})$$

$$\text{Άρα } ημ(5t + \frac{π}{6}) = -1 \Rightarrow ημ(5t + \frac{π}{6}) = ημ\frac{3π}{2}$$

Οι λύσεις αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης βρίσκονται ως εξής:

$$5t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$ με k=0,1,2,...

Για k=0 έχουμε $5t_1+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 5t_1=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow 5t_1=\frac{8\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{8\pi}{30}$ s ή

$$\boxed{t_1=\frac{4\pi}{15}\ \text{s}}$$

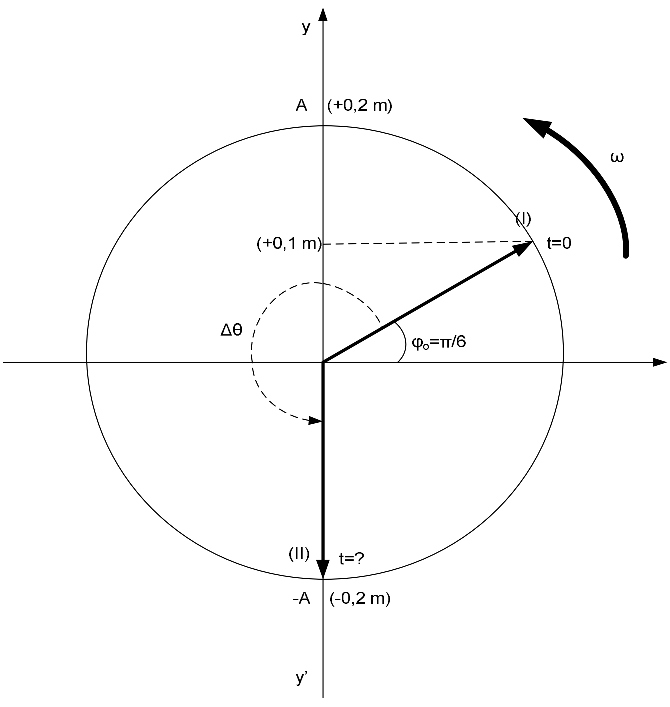
Για κ=1 έχουμε $5t_2+\frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 5t_2=2\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow 5t_2=\frac{20\pi}{6}$ ή

$$\boxed{t_2=\frac{2\pi}{3}\ \text{s}}$$

Γίνεται αντιληπτό πως δεκτή είναι η τιμή $t_1=\frac{4\pi}{15}$ s καθώς αντιστοιχεί στην 1$^η$ φορά που το συσσωμάτωμα θα βρεθεί στην ΚΑΘ. Η $t_2=\frac{2\pi}{3}$ s είναι μεταγενέστερη στιγμή ($t_2$> $t_1$) και αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα θα βρεθεί στην ΚΑΘ για 2$^η$ φορά. Είναι ευνόητο πως αν συνεχίζαμε και θέταμε κ=2, κ=3 κοκ θα βρίσκαμε τις χρονικές στιγμές που το συσσωμάτωμα θα βρισκόταν στην ΚΑΘ την 3$^η$ φορά, 4$^η$ φορά κοκ.

**2$^{ος}$ τρόπος:** Χρησιμοποιούμε το «εργαλείο» του στρεφόμενου διανύσματος.

Θεωρούμε δηλαδή στρεφόμενο διάνυσμα μέτρου Α που περιστρέφεται σε κύκλο ακτίνας Α (όπως φαίνεται στο Σχήμα 6) με γωνιακή ταχύτητα ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης (ω). Κατά αυτόν τον τρόπο η προβολή του διανύσματος στον y’y αντιστοιχεί στην απομάκρυνση του σώματος από τη ΘΙ. Βάσει αυτού του στρεφόμενου διανύσματος μπορούμε να προσεγγίσουμε πολύ εύκολα την ΑΑΤ.




Σχήμα 6

Η περίπτωση μας (μετακίνηση από τη θέση y=+A/2 στη θέση y=-A) αντιστοιχεί στη μετάβαση του διανύσματος από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ) (βλ. Σχήμα 6). Η γωνία που πρέπει να διαγράψει το διάνυσμα είναι :

$$\Delta\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \text{ ή } \Delta\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

Εξ ορισμού η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για τη μετάβαση από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ) είναι $\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$. Άρα: $\Delta t = \frac{4\pi/3}{5}$ s ή

$$\boxed{\Delta t = \frac{4\pi}{15} \text{ s}}$$

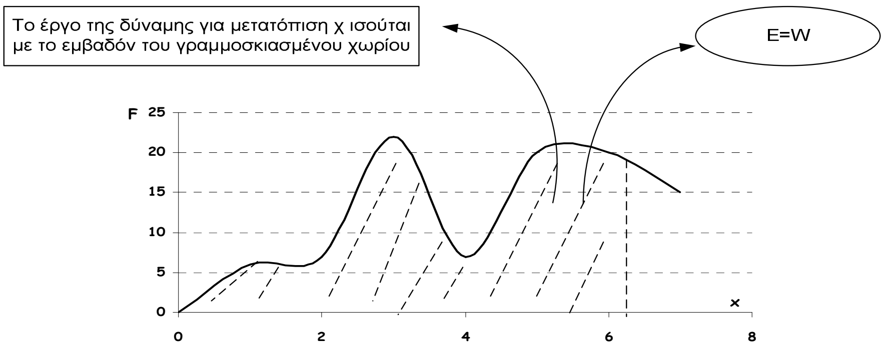
Εν τέλει, λοιπόν, η χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα θα βρεθεί στην ΚΑΘ θα είναι η $\boxed{t_1 = \frac{4\pi}{15} \text{ s}}$

**5ο Ζήτημα:**

***Παρατήρηση επί του Έργου:***

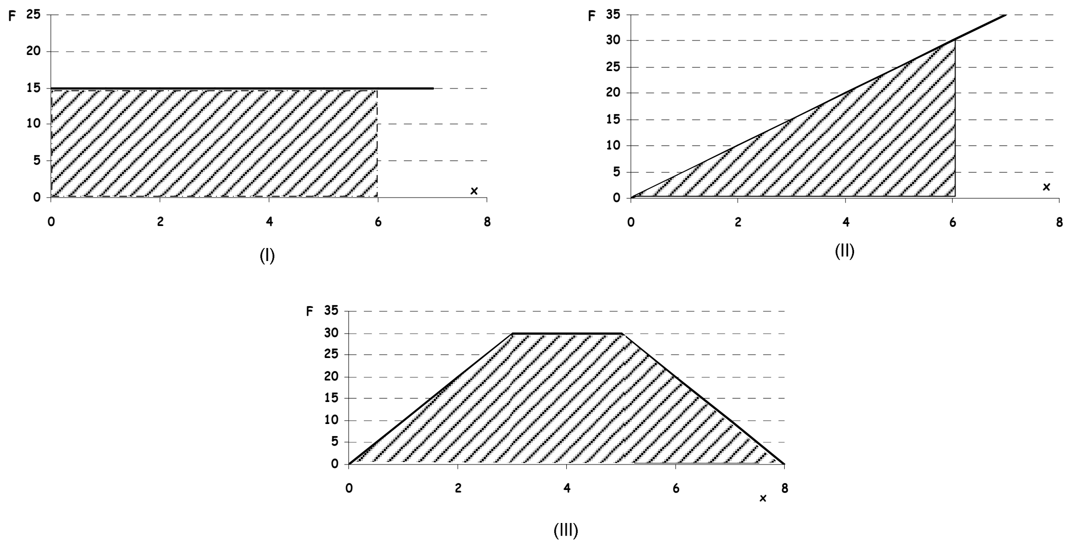
Ο ορισμός του έργου είναι $\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}}$

Αυτό «σημαίνει» (για λόγους που δεν θα αναλυθούν επί του παρόντος πως το έργο ισούται με το εμβαδόν σε ένα διάγραμμα F-x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.




**Σχήμα 7**

Συνεπώς, καθίσταται ευνόητο πως για απλές γραφικές παραστάσεις όπως είναι αυτές στο Σχήμα 7 μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το κατάλληλο εμβαδόν και, κατ’ επέκταση, το έργο της δύναμης.




**Σχήμα 8**

Για πιο πολύπλοκες γραφικές παραστάσεις (όπως του Σχήματος 6) και με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα ΔΕΝ μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο με αυτό τον τρόπο (χρησιμοποιώντας εμβαδόν).

Ειδικότερα, για την περίπτωση του Σχήματος 7 (I), όπου η F είναι σταθερή, το έργο θα είναι $\boxed{W=Fx}$ .

**(!)** Η ισότητα αυτή αποτελεί τον «τύπο» του έργου για μία σταθερή δύναμη (F=σταθ).

Επιπροσθέτως: **(!!)** Αν η δύναμη F που παράγει έργο είναι **συντηρητική** τότε το έργο της υπολογίζεται (εκτός του υπολογισμού του εμβαδού σε F-x) από τη σχέση:

$$\boxed{W = U_{αρχ} - U_{τελ}}$$

Όπου $U_{arx}$ και $U_{τελ}$, η αρχική δυναμική ενέργεια και η τελική δυναμική ενέργεια για δύο θέσεις της μελετηθείσας κίνησης.

**Ξεκαθαρίζοντας:** Οι συντηρητικές δυνάμεις που γνωρίζουμε είναι οι εξής:

i) Δύναμη ελατηρίου ($\vec{F}_{ελ}$)

ii) Βάρος ($\vec{w}$)

iii) Δύναμη Coulomb ($\vec{F}_C$)

και οι δυναμικές ενέργειες που τις αφορούν οι ακόλουθες:

1. $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$, με χ η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου
2. $U_{ελ} = mgh$, με h η υψομετρική απόσταση από μία στάθμη αναφοράς (U=0)
3. $U_{F_C} = k\frac{q_1q_2}{r}$, με r η απόσταση μεταξύ δύο φορτίων .

Επισημαίνεται πως τις περισσότερες φορές είναι πολύ εύκολο και χρηστικό να αξιοποιείται ο τύπος $W = U_{αρχ} - U_{τελ}$ στις περιπτώσεις των συντηρητικών δυνάμεων.

Το έργο του βάρους (w) κατά την προαναφερθείσα κίνηση (y=+A/2 έως y=-A) μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα από τη σχέση:

$W_w = w \cdot h$, όπου h η μετατόπιση του συσσωματώματος κατά την προαναφερθείσα σχέση (βλ. Σχήμα 5: h=0,3 m στην κατεύθυνση του βάρους).

Άρα: $W_w = (m_1 + m_2)gh \Rightarrow W_w = (3+1)10 \cdot 0,3\ J$ ή $\boxed{W_w = 12\ J}$

**Παρατήρηση:** Το έργο του βάρους για την κίνηση που μελετάμε είναι θετικό, αφού το διάνυσμα του βάρους και το διάνυσμα της μετατόπισης είναι ομόρροπα. Δηλαδή, το έργο του βάρους είναι παραγόμενο.

Το έργο της δύναμης ελατηρίου ($F_{ελ}$) κατά την προαναφερθείσα κίνηση (y=+A/2 έως y=-A) μπορεί να υπολογιστεί βασιζόμενοι στο ότι η δύναμη αυτή είναι συντηρητική. Συνεπώς:

$W_{F_{ελ}} = U_{αρχ} - U_{τελ}$, με $U_{αρχ}$ και $U_{τελ}$ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην αρχική και τελική θέση της κίνησης, αντίστοιχα.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$, με χ η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου.

Συνεπώς: $W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k \cdot l_1^2 - \frac{1}{2}k \cdot (l_2 + A)^2 \Rightarrow W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 - \frac{1}{2}100 \cdot (0,4+0,2)^2\ J$

ή $\boxed{W_{F_{ελ}} = -13,5\ J}$

**Παρατήρηση:** **(☺)** Προσοχή!: Η δύναμη ελατηρίου και κατ' επέκταση το έργο της υπολογίζεται ως προς τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου. Αντίθετα, η δύναμη επαναφοράς ($F_{επαν}$) και κατ' επέκταση το έργο της υπολογίζεται ως προς τη Θέση Ισορροπίας (ΘΙ) της ΑΑΤ.

Έτσι, στο εν λόγω ζήτημα το έργο της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται ως εξής:

Η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη ως συνισταμένη δύναμη δύο συντηρητικών δυνάμεων (της δύναμης ελατηρίου και του βάρους.

Ως εκ τούτου: $W_{F_{επαν}} = U_{αρχ} - U_{τελ}$, με $U_{αρχ}$ και $U_{τελ}$ η δυναμική ενέργεια της δύναμης επαναφοράς στην αρχική και τελική θέση της κίνησης, αντίστοιχα.

Η δυναμική ενέργεια της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$U_{F_{επαν}} = \frac{1}{2}ky^2$, με y η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη ΘΙ.

Συνεπώς: $W_{F_{επαν}} = \frac{1}{2}k \cdot y_1^2 - \frac{1}{2}k \cdot (-A)^2 \Rightarrow W_{F_{επαν}} = \frac{1}{2}100 \cdot 0,1^2 - \frac{1}{2}100 \cdot (-0,2)^2$

ή $\boxed{W_{F_{επαν}} = -1,5\ J}$

**Τι διαπιστώνουμε;**

***α.*** Το έργο της $F_{επαν}$ είναι αρνητικό. Αυτό είναι αναμενόμενο αν αναλογιστούμε πως κατά τη διαδρομή y=+A/2 έως y=0 η δύναμη επαναφοράς είναι ομόρροπη της μετατόπισης και, ως εκ τούτου, το έργο είναι θετικό (παραγόμενο). Αντίθετα κατά τη μετάβαση από y=0 έως y=-A η δύναμη επαναφοράς είναι αντίρροπη της μετατόπισης και, ως εκ τούτου, το έργο είναι αρνητικό (καταναλισκόμενο). Επειδή η μετάβαση 0→-Α είναι μεγαλύτερη από την +Α/2→0 θα έχουμε «περισσότερο» αρνητικό έργο απ' ότι θετικό και, συνεπώς, το συνολικό έργο της $F_{επαν}$ είναι αρνητικό

**β.** $$W_{F_{επαν}} = W_w + W_{F_{ελ}} = 12\ J - 13{,}5\ J = -1{,}5\ J$$

**(☺ ☺)** Επίσης, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το έργο των δυνάμεων, έμμεσα, αξιοποιώντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ) για την μετάβαση της κίνησης που μελετάμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_{F_{επαν}} \text{ ή } 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = W_w + W_{F_{ελ}}$$

**6ο Ζήτημα:**

Για να ακούσει ο παρατηρητής (Β) ήχο συχνότητας ίδιας με αυτή που εκπέμπει η πηγή, θα πρέπει η πηγή (άρα και το συσσωμάτωμα) να έχει ταχύτητα ίδια με αυτή του παρατηρητή, δηλαδή να είναι ακίνητη.

**Παρατήρηση:** Το φαινόμενο Doppler λαμβάνει χώρα αν και μόνο αν η πηγή ηχητικών κυμάτων και ο παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Δηλαδή, αν και μόνο αν, η μεταξύ τους απόσταση τείνει να μεταβάλλεται. Αν, αντίθετα, η μεταξύ τους απόσταση είναι σταθερή τότε ισχύει $f_A=f_S$.

Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Ο πιο εύκολος τρόπος για να υπολογίσουμε όλες εκείνες χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης είναι να αξιοποιήσουμε την απάντηση του 4ου Ζητήματος.

Στο εν λόγω ζήτημα υπολογίσαμε πως το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην Κάτω Ακραία Θέση (ΚΑΘ) για 1η φορά την $t_1 = \frac{4\pi}{15}$ s. Απ' αυτό συμπεραίνουμε πως το συσσωμάτωμα βρίσκεται για 1η φορά στην Άνω Ακραία Θέση (ΑΑΘ) τη χρονική στιγμή $t_0 = t_1 - \frac{T}{2}$ ή $t_0 = \frac{4\pi}{15} - \frac{\pi}{5}$ s

Άρα: $t_0 = \frac{\pi}{15}$ s

**Παρατήρηση:** Υπενθυμίζεται πως η χρονική διάρκεια της κίνησης μεταξύ δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι Τ/2.

Συνεπώς, οι χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης είναι οι εξής:

$$t = t_0 + k\frac{T}{2} \quad \text{με } k=0,1,2,3,...$$

Δηλαδή: $$\boxed{t = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}} \quad \text{με } k=0,1,2,3,...$$

Επίσης, πρέπει να επισημανθεί πως για k ζυγό αριθμό θα έχουμε εκείνες τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στην ΑΑΘ, ενώ για k μονό αριθμό θα έχουμε εκείνες τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στην

ΚΑΘ.

**Εναλλακτικά:**

Μπορούμε, επίσης, να εργαστούμε όπως στο 4$^{ο}$ Ζήτημα (χωρίς όμως να αξιοποιήσουμε τη λύση του)

**1$^{ος}$ τρόπος:** Θέτουμε στην εξίσωση της απομάκρυνσης y=±A. Άρα έχουμε:

$$\pm A = A \cdot ημ(5t + \frac{π}{6})$$

$$ή \;\; ημ(5t + \frac{π}{6}) = \pm 1$$

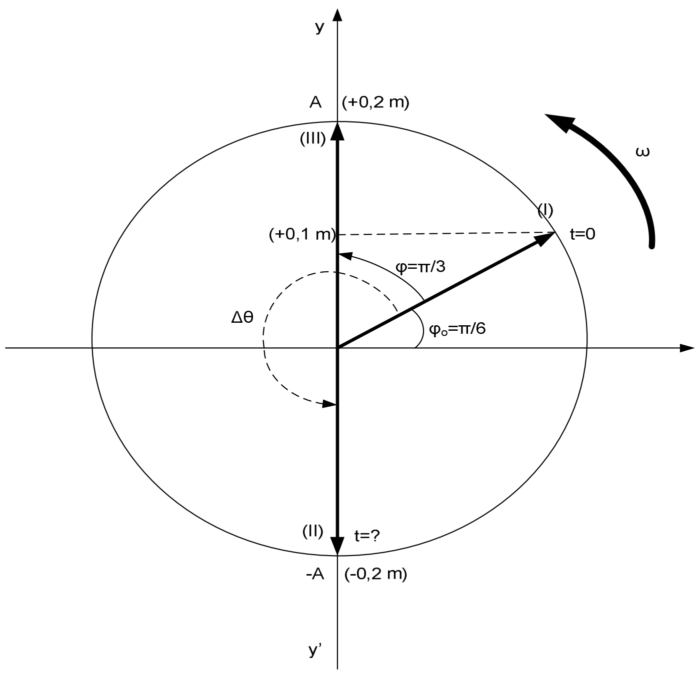
Οι λύσεις αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι οι εξής:

$5t + \frac{π}{6} = kπ + \frac{π}{2}$ με k=0,1,2,...

Άρα $\boxed{t = k\frac{π}{5} + \frac{π}{15}}$ με k=0,1,2,...

**2$^{ος}$ τρόπος:** Χρησιμοποιούμε το «εργαλείο» του στρεφόμενου διανύσματος.

Θεωρούμε δηλαδή στρεφόμενο διάνυσμα μέτρου A που περιστρέφεται σε κύκλο ακτίνας A (όπως φαίνεται στο Σχήμα 9) με γωνιακή ταχύτητα ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης (ω). Κατά αυτόν τον τρόπο η προβολή του διανύσματος στον y'y αντιστοιχεί στην απομάκρυνση του σώματος από τη ΘΙ. Βάσει αυτού του στρεφόμενου διανύσματος μπορούμε να προσεγγίσουμε πολύ εύκολα την ΑΑΤ.




Σχήμα 9

Η μετακίνηση από τη θέση y=+A/2 στη θέση y=+A (1$^{η}$ φορά που θα αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (Β) συχνότητα ίδια με την πηγή) αντιστοιχεί στη μετάβαση του διανύσματος από τη θέση (I) στη θέση (III) (βλ. Σχήμα 9). Η γωνία που πρέπει να διαγράψει το διάνυσμα είναι $φ = \frac{π}{3}$. .

Εξ ορισμού η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \frac{\varphi}{t_0}$. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για τη μετάβαση από τη θέση (I) στη θέση (III) είναι $t_0 = \frac{\varphi}{\omega}$. Άρα: $t = \frac{\pi/3}{5}$ s ή $\boxed{t_0 = \frac{\pi}{15}\ \text{s}}$

Συνεπώς, οι χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης είναι οι εξής:

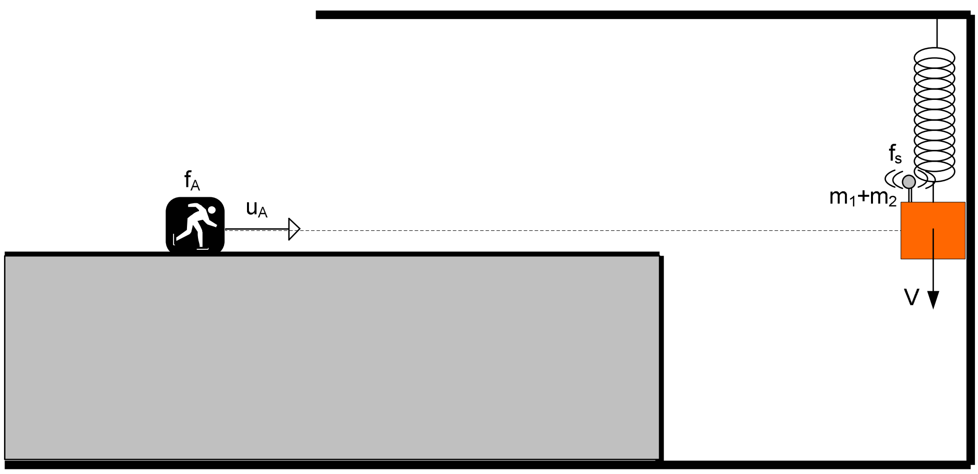
$t = t_0 + k\frac{T}{2}$ με k=0,1,2,3,...

Δηλαδή: $\boxed{t = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}}$ με k=0,1,2,3,...

**7ο Ζήτημα:**

Την t=0 το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση y=+A/2 με $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s προς τα πάνω. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως το συσσωμάτωμα θα έχει για 1η φορά ταχύτητα $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s με φορά προς τα κάτω όταν βρεθεί για 1η φορά στη θέση y=+A/2 με φορά προς τα κάτω (βλ. Σχήμα 10).

**<u>Παρατήρηση:</u>** Υπενθυμίζεται πως σε κάθε θέση της ταλάντωσης αντιστοιχεί μία τιμή (μέτρο) ταχύτητας και δύο κατευθύνσεις (θετική – αρνητική): $u = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$




Σχήμα 10

Στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, λοιπόν, το συσσωμάτωμα (άρα και η πηγή ηχητικών κυμάτων) βρίσκεται στην ευθεία που αποτελεί προέκταση της ταχύτητας του παρατηρητή (Α) (βλ. Σχήμα 10). Συνεπώς, η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το συσσωμάτωμα και τον παρατηρητή. Ως εκ τούτου δεν υπάρχει συνιστώσα της ταχύτητας του συσσωματώματος που να διέρχεται από την προαναφερθείσα ευθεία και συνεπώς δεν λαμβάνεται η ταχύτητα αυτή υπόψη στη σχέση που διέπει το φαινόμενο Doppler.

Για να καταστούν πιο κατανοητά τα ανωτέρω μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζήτημα και ως εξής: Τη χρονική στιγμή (εκείνη **ακριβώς** τη χρονική στιγμή) που το συσσωμάτωμα (άρα και η πηγή ηχητικών κυμάτων) έχει ταχύτητα κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από το συσσωμάτωμα και από τον παρατηρητή (Α) η απόσταση μεταξύ των δύο κινητών δεν τείνει να μεταβληθεί λόγω της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Συνεπώς, λοιπόν, η σχέση που αφορά στο φαινόμενο Doppler θα είναι:

$$f_A = \frac{u + u_A}{u} f_S$$

Άρα: $f_A = \dfrac{340+3}{340} 680\ \text{Hz}$ ή $\boxed{f_A = 686\ \text{Hz}}$

**$8^{ο}$ Ζήτημα:**

Η ταχύτητα του συσσωματώματος (άρα και της πηγής ηχητικών κυμάτων) δίνεται από τη σχέση:

$$u_S = u_{max} συν(ωt + φ_o)$$

Δηλαδή: $u_S = συν(5t + π/6)$ (SI)

Επίσης, την t=0 η πηγή ηχητικών κυμάτων πλησιάζει προς ακίνητο παρατηρητή (Β).

Συνεπώς η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (Β) σε σχέση με το χρόνο.

$$f_B = \frac{u}{u - u_S} f_S$$

Άρα: $\boxed{f_B = \dfrac{340}{340 - συν(5t + π/6)} 680\ \text{Hz}}$

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

***Δημήτρης Τσάτσης***