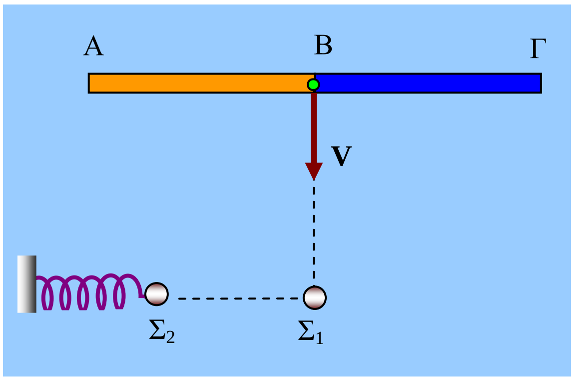
Κρούσεις – ταλάντωση – περιστροφή και στροφορμή



Δυο όμοιες λεπτές ράβδοι ΑΒ, και ΒΓ μάζας $M = 2m$ και μήκους $\ell = 0{,}5$ m η κάθε μια, συνδέονται μεταξύ τους μέσω άρθρωσης αμελητέας μάζας.

Αρχικά και οι δυο ράβδοι κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα **V**, σχηματίζοντας ευθεία γραμμή. Κάποια χρονική στιγμή, ακινητοποιείται απότομα η ράβδος ΑΒ, με αποτέλεσμα η ΒΓ να αρχίσει να στρέφεται χωρίς τριβές . Όταν η ΒΓ έχει στραφεί κατά π/2 , συγκρούεται με το άκρο της Γ , ελαστικά, με σφαιρίδιο Σ_1 αμελητέων διαστάσεων μάζας $m_1 = 3m$ που ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Το σφαιρίδιο Σ_1 στη συνέχεια, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σφαιρίδιο Σ_2 μάζας $m_2 = m$, που κινείται αντίθετα, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 4$m/s , δεμένο στο δεξιό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου.

Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο, το σφαιρίδιο Σ_1 κινείται πριν την κρούση κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, ενώ το Σ_2 τη στιγμή της κρούσης , $t = 0$, περνά από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Αν η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το συσσωμάτωμα που προκύπτει από την πλαστική κρούση, είναι $x = 2A\eta\mu\left(\pi f t + \pi\right)$, όπου A και f το πλάτος και η συχνότητα αντίστοιχα , της ταλάντωσης που εκτελούσε το Σ_2 να υπολογίσετε:

i) την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_1}$ του σφαιριδίου Σ_1 λίγο πριν την κρούση του με το Σ_2.

ii) τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου λίγο πριν συγκρουστεί με το σφαιρίδιο Σ_1 και αμέσως μετά.

iii) την ταχύτητα **V**

iv) Σε πόσο χρόνο μετά την ακινητοποίηση της ράβδου ΑΒ χτυπά η ΒΓ το σφαιρίδιο Σ_1 .

v) Τη συνάρτηση $L_{\Sigma(B)} = f(t)$ όπου $L_{\Sigma(B)}$ η στιγμιαία τιμή της στροφορμής του συσσωματώματος Σ_1-Σ_2 ως προς το σημείο Β.

vi) Την τιμή του λ στη σχέση $\dfrac{dL_{\Sigma(B)}}{dt} = \lambda \cdot \dfrac{dp}{dt}$, όπου $\left(\dfrac{dp}{dt}\right)$ είναι η στιγμιαία τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος.

Δίδονται m = 1kg , f = (10/π) Hz , και η ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΓ ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_B = \dfrac{1}{3}M\ell^2$.

Απάντηση

i) Από τη σχέση $x = 2A\eta\mu\left(\pi f t + \pi\right)$ προκύπτει ότι, η ταχύτητα του συσσωματώματος θα είναι

$\upsilon = 2A\pi f \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi f t + \pi)$ (1) και για $t = 0$, $\upsilon = 2A\pi f \cdot \sigma\upsilon\nu\pi$ ή $\upsilon = -2A\pi f = -A(2\pi f) = -\upsilon_2 = -4$m/s < 0 άρα

$$\vec{\upsilon} \nearrow\swarrow \vec{\upsilon}_2$$

Από την αρχή της διατήρησης της ορμής για την κρούση $\Sigma_1 - \Sigma_2$ έχουμε ότι

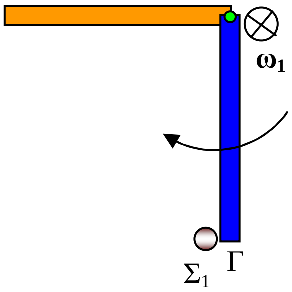
$m_2\vec{\upsilon}_2 + m_1\vec{\upsilon}_1 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}$ ή $m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 = (m_1+m_2)\upsilon$ άρα $1\text{kg}\cdot 4\frac{m}{s} - 3\text{kg}\cdot\upsilon_1 = -4\text{kg}\cdot 4\frac{m}{s}$ άρα

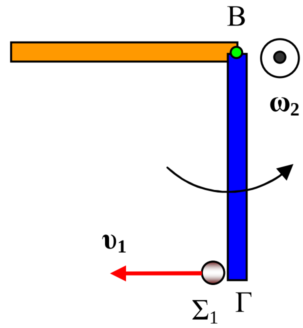
το μέτρο της $\vec{\upsilon}_1$ είναι $\upsilon_1 = \frac{20}{3}\frac{m}{s}$ (2) και η φορά της προς το Σ_2.

ii) Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής για την κρούση της ράβδου ΒΓ με το σφαιρίδιο Σ_1, υποθέτοντας ότι η φορά περιστροφής της ράβδου μετά την κρούση αντιστρέφεται κι έχουμε

$\frac{1}{3}M\ell^2\omega_1 = -\frac{1}{3}M\ell^2\omega_2 + m_1\upsilon_1\ell$ ή $2m\ell\omega_1 = -2m\ell\omega_2 + 9m\upsilon_1$ ή $2\ell(\omega_1+\omega_2) = 9\upsilon_1$ και με βάση την (2) ή

$\omega_1 + \omega_2 = 60\text{rad/s}$ (3)





Εξ άλλου με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας λίγο πριν και ακριβώς μετά την ελαστική κρούση έχουμε

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή

$$M\ell^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 3m_1\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$2m\ell^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 3\cdot 3m\upsilon_1^2 \text{ ή } \omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{9\upsilon_1^2}{2\ell^2} = 800 \text{ ή}$$

$(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2) = 800$ και με βάση την (3), $(\omega_1 - \omega_2)60 = 800$ ή $\omega_1 - \omega_2 = \frac{40}{3}\text{rad/s}$ (4)

Από το σύστημα των (3) και (4) έχουμε ότι

$$2\omega_1 = \frac{220}{3}\text{rad/s} \text{ ή } \omega_1 = \frac{110}{3}\text{rad/s} \text{ (5) και}$$

$$\omega_2 = 60\text{rad/s} - \frac{110}{3}\text{rad/s} \text{ ή } \omega_2 = \frac{70}{3}\text{rad/s} \text{ (6)}$$

iii) Κατά το σταμάτημα της ΑΒ, στη ράβδο ΒΓ ασκείται το βάρος της και η δύναμη από την άρθρωση. Δυνάμεις των οποίων η ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίσες με μηδέν. Έτσι με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την ράβδο ΒΓ λίγο πριν το σταμάτημα της ΑΒ και αμέσως μετά έχουμε

$$MV\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2\omega_1 \text{ ή } V = \frac{2\ell\omega_1}{3} \text{ και με βάση την (5) } V = \frac{110}{9}\text{m/s}$$

iv) Η κίνηση της ΒΓ γίνεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές και χωρίς ροπές άρα

$$\theta = \omega_1\Delta t_1 \text{ ή } \Delta t_1 = \frac{\theta}{\omega_1} \text{ και με βάση την (5) } \Delta t_1 = \frac{3\pi}{220}\text{s}$$

v) Η στιγμιαία τιμή της στροφορμής του συσσωματώματος ως προς το Β είναι $L_{\Sigma(B)} = (m_1 + m_2)\upsilon\ell$ και με βάση την (1) $L_\Sigma = (m_1+m_2)A(2\pi f)\text{συν}(\pi f t + \pi)\ell$ ή $L_\Sigma = 4m\upsilon_2\ell\,\text{συν}(\pi f t + \pi)$ ή $L_\Sigma = 8\,\text{συν}(10t + \pi)\text{SI}$

vi) Είναι $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{ολ}$ και $\frac{d\vec{L}_{Σ(Β)}}{dt}=\vec{τ}_{ολ(Β)}$ άρα

$$\frac{dp}{dt}=F_{επ} \quad \text{και} \quad \frac{dL_{Σ(Β)}}{dt}=F_{επ}\cdot\ell \quad \text{έτσι έχουμε ότι}$$

$$\frac{dL_{Σ(Β)}}{dt}=\frac{dp}{dt}\cdot\ell \quad \text{άρα} \quad λ=\ell=0,5\text{m}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης