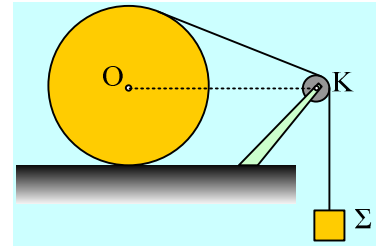


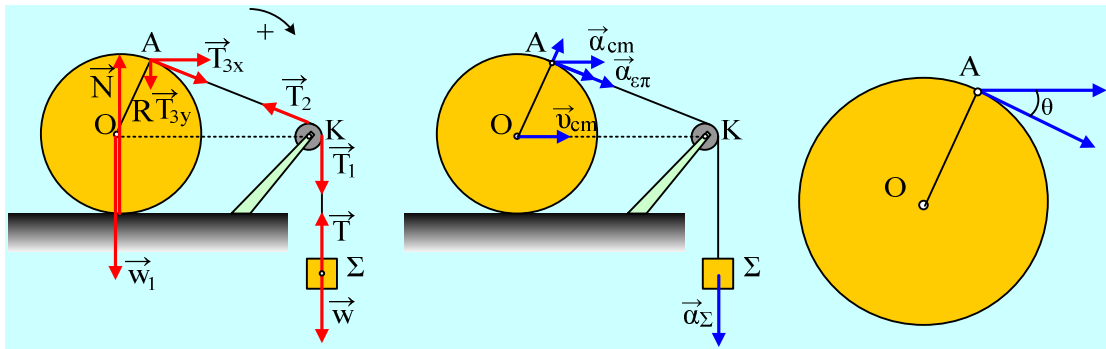
Κίνηση κυλίνδρου σε λείο επίπεδο με χρήση αβαρούς τροχαλίας.

Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας $M=26,4\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσει από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο του άκρο κρέμεται ένα σώμα Σ μάζας $m=10/9\text{ kg}$. Ο κύλινδρος συγκρατείται ακίνητος σε λείο οριζόντιο επίπεδο και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπου $\eta\mu\theta=0,6$ (συν $\theta=0,8$). Σε μια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Η τροχαλία έχει ακτίνα $r=0,1\text{m}$ και το κέντρο της K απέχει 1m από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



- i) Να εξηγήσετε γιατί ο κύλινδρος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση. Να εξετάσετε αν πρόκειται:
- α) να ολισθήσει, β) να κυλήσει γ) να «σπινάρει»
- ii) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει την αρχική επιτάχυνση του άξονα O του κυλίνδρου με την επιτάχυνση του σώματος Σ .
- iii) Να υπολογίσετε την αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ .
- iv) Να βρεθεί ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής:
- α) Του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- β) Του συστήματος κύλινδρος-σώμα Σ , ως προς το άξονα περιστροφής της τροχαλίας.
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:



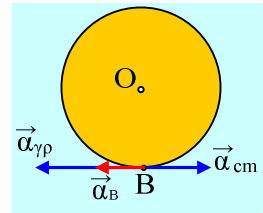
- i) Στο πρώτο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου αφού το νήμα είναι αβαρές $T=T_1$ και $T_2=T_3$, ενώ επειδή είναι αβαρής η τροχαλία, $T_1=T_2$, συνεπώς $T=T_3$. Αφού η τάση του νήματος δεν περνά από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου, θα έχει ροπή ως προς τον άξονα, συνεπώς θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, ενώ η συνιστώσα της T_{3x} θα προκαλέσει και επιτάχυνση οριζόντια. Έτσι ο κύλινδρος θα εκτελέσει μεταφορική και στροφική κίνηση, δηλαδή σύνθετη κίνηση. Συνεπώς από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow T \cdot \text{συν}\theta = M \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{T \text{συν}\theta}{M} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow TR = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Ra_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{M} \quad (2)$$

Από (1) και (2) βλέπουμε ότι $R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} > a_{cm}$. (3)

Εστιάζουμε τώρα σε ένα σημείο Β επαφής του κυλίνδρου με το έδαφος. Το σημείο αυτό έχει μια επιτάχυνση ίση με a_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης και μια επιτρόχια $a_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ εξαιτίας της στροφικής κίνησης του στερεού, όπως στο σχήμα. Τότε με βάση τη σχέση (3) η επιτάχυνση του σημείου είναι προς τα αριστερά και ο κύλινδρος «σπινάρει».



ii) Με βάση το μεσαίο σχήμα, κάθε σημείο του νήματος θα κινηθεί με επιτάχυνση ίδιου μέτρου με το σώμα Σ, συνεπώς και το σημείο Α, στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Αλλά το σημείο Α, έχει μια επιτάχυνση $a_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, στη διεύθυνση του νήματος και μια a_{cm} οριζόντια. Έτσι στην διεύθυνση του νήματος η επιτάχυνση του σημείου Α είναι $a_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} R + a_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$. Με βάση αυτά παίρνουμε:

$$a_{\Sigma} = a_A = a_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + a_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (4)$$

iii) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για το σώμα Σ δίνει $mg - T = ma_{\Sigma}$ (5)

Από (1), (2) και (4) παίρνουμε:

$$\frac{mg - T}{m} = \frac{T \sigma\upsilon\nu\theta}{M} \sigma\upsilon\nu\theta + \frac{2T}{M} \rightarrow$$

$$T = \frac{g}{\frac{1}{m} + \frac{2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{M}} = \frac{10}{\frac{9}{10} + \frac{2 + 0,8^2}{26,4}} N = 10N$$

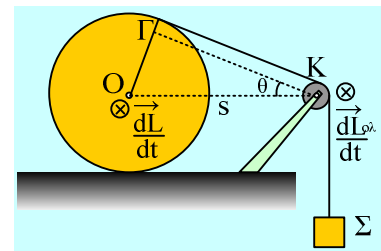
και από την (5) παίρνουμε: $a_{\Sigma} = \frac{mg - T}{m} = \frac{10}{9} \frac{10 - 10}{10} m/s^2 = 1m/s^2$

iv) α) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίσος:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau} \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = TR = 10 \cdot 1kg \cdot m^2 / s^2 = 10kg \cdot m^2 / s^2$$

με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.



β) Ο κύλινδρος ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση (πρώτο σχήμα):

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - Mg - T \cdot \eta\mu\theta = 0 \rightarrow N = 26,4 \cdot 10N + 10 \cdot 0,6N = 270N.$$

Εξάλλου το κέντρο του κυλίνδρου απέχει απόσταση s από το κέντρο της τροχαλίας, όπου:

$$\eta\mu\theta = \frac{(O\Gamma)}{(OK)} \rightarrow s = \frac{R - r}{\eta\mu\theta} = \frac{1m - 0,1m}{0,6} = 1,5m$$

Οπότε ο ζητούμενος ρυθμός είναι $\frac{d\vec{L}_{o\lambda}^K}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{\epsilon\xi} \rightarrow$

$$\frac{dL_{ολ}^K}{dt} = mgr + Ns - Mgs = \left(\frac{10}{9} 10 \cdot 0,1 + 270 \cdot 1,5 - 26,4 \cdot 10 \cdot 1,5 \right) kg \cdot m^2 / s^2 \approx 802,1 kg \cdot m^2 / s^2$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης