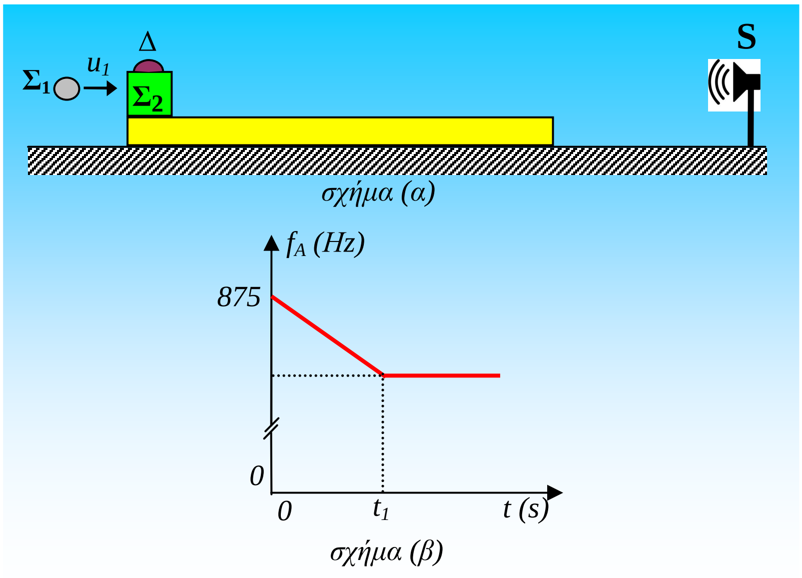
ΚΡΟΥΣΗ-DOPPLER ΚΑΙ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Μία ομογενής σανίδα μάζας ***M=4kg*** και μήκους ***L*** βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο αριστερό άκρο της σανίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα, βρίσκεται σώμα ***Σ_2*** μάζας ***m_2=1kg***, το οποίο φέρει δέκτη (Δ) ηχητικών κυμάτων αμελητέας μάζας και είναι ελεύθερο να κινηθεί πάνω στη σανίδα, με την οποία εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης ***μ=0,4***. Σε μεγάλη απόσταση από τη σανίδα και στην ίδια διεύθυνση με το σώμα Σ_2 βρίσκεται πηγή S εκπομπής ηχητικών κυμάτων συχνότητας ***f_S=850Hz.*** Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας ***m_1=0,5kg*** κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου ***u_1*** και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2 που βρίσκεται πάνω στη σανίδα, με αποτέλεσμα αμέσως μετά την κρούση, που λαμβάνεται ως ***t=0***, να ενεργοποιηθεί ο δέκτης που φέρει το σώμα Σ_2. Στο σχήμα (β) απεικονίζεται η μεταβολή των συχνότητας που καταγράφει ο δέκτης σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση

Να υπολογίσετε:

β) την ταχύτητα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) τη συχνότητα f_A που καταγράφει ο δέκτης από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά.

δ) τον χρόνο εκπομπής των κυμάτων που εκπέμπει η πηγή και λαμβάνει ο δέκτης (Δ) στο χρονικό διάστημα που το σώμα Σ_2 ολισθαίνει πάνω στη σανίδα.

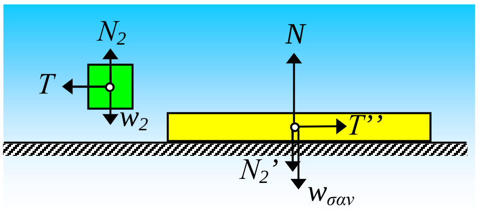
ε) το ελάχιστο μήκος της σανίδας L ώστε να μην το Σ_2 να μην εγκαταλείψει την σανίδα κατά την κίνηση του μετά την κρούση

στ) το έργο της τριβής ολίσθησης που δέχεται το σώμα $Σ_2$, καθώς και το έργο της τριβής ολίσθησης που δέχεται η σανίδα σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος $Σ_2$ πάνω σε αυτή

ζ) την τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος $Σ_2$ και σανίδας ώστε αμέσως μετά την κρούση ο δέκτης του $Σ_2$ να καταγράφει συχνότητα που μειώνεται με ρυθμό $5s^{-2}$.

Δίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον ακίνητο αέρα ισούται με 340m/s και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση:



α) Αμέσως μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ αρχίζει να ολισθαίνει πάω στη σανίδα. Στο σώμα $Σ_2$ ασκείται τριβή Τ λόγω αλληλεπίδρασης με την σανίδα με φορά προς τα αριστερά, ενώ λόγω δράσης αντίδρασης στη σανίδα θα ασκηθεί η αντίδραση Τ' που αποτελεί την δύναμη που θα θέσει σε κίνηση την μέχρι τότε ακίνητη σανίδα. Η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ μειώνεται με τον χρόνο ενώ της σανίδας αυξάνεται. Μέχρι και την χρονική στιγμή t_1 ο δέκτης πλησιάζει προς την πηγή με ταχύτητα, το μέτρο της οποίας μειώνεται με σταθερό ρυθμό, γι' αυτό και στο σχήμα (β) μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης μειώνεται με σταθερό ρυθμό. Όταν οι δύο ταχύτητες εξισωθούν το σώμα $Σ_2$ θα ηρεμήσει ως προς τη σανίδα και οι τριβές θα μηδενισθούν, που σημαίνει ότι στη συνέχεια το σώμα και η σανίδα στο σύστημα αναφοράς του εδάφους θα έχουν κοινή ταχύτητα που θα διατηρείται χρονικά σταθερή (γι' αυτό από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης είναι χρονικά σταθερή, δεδομένου ότι η ταχύτητα του $Σ_2$ παραμένει σταθερή). Για όλη τη διάρκεια της ολίσθησης του σώματος $Σ_2$ πάνω στη σανίδα, οι τριβές είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος σανίδα-$Σ_2$, οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο.

β) Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$u_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1\ (1)\quad \text{κ και} \quad u_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1\ (2)$$

Η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης που φέρει το $Σ_2$ είναι f_A=875Hz, άρα

$$f_A=\frac{u_{ηχ}+u_2'}{u_{ηχ}}\cdot f_S \Rightarrow u_2'=\frac{f_A\cdot u_{ηχ}}{f_S}-u_{ηχ}=\frac{875\cdot 340}{850}-340=350-340$$

$$\rightarrow \boldsymbol{u_2'=10m/s}$$

Από την (2) βρίσκουμε τη ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση:

$$u_1 = \frac{u_2'(m_1 + m_2)}{2m_1} \rightarrow u_1 = 15\text{m/s}$$

Άρα η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{0{,}5 - 1}{0{,}5 + 1} \cdot 15 \rightarrow \boldsymbol{u_1' = -5m/s}$$

δηλαδή το σώμα Σ_1 ανακλάται με ταχύτητα μέτρου 5m/s.

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το σύστημα σανίδα-Σ_2 αποκτά κοινή ταχύτητα, η οποία μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή της Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m_2 u_2' = (M + m_2)V_K \rightarrow V_K = \frac{m_2 u_2'}{M + m_2} = \frac{1 \cdot 10}{4 + 1} \rightarrow V_K = 2\text{m/s}$$

Άρα η χρονικά σταθερή συχνότητα f_A που καταγράφεται από τη χρονική στιγμή t1 και μετά είναι:

$$f_A = \frac{u_{\eta\chi} + u_2'}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S \Rightarrow f_A = \frac{340 + 2}{340} \cdot 850$$

$$\boldsymbol{f_A = 855Hz}$$

δ) Με εφαρμογή του 2$^{\text{ου}}$ νόμου Νεύτωνα για την κίνηση του Σ_2 πάνω στη σανίδα έχουμε:

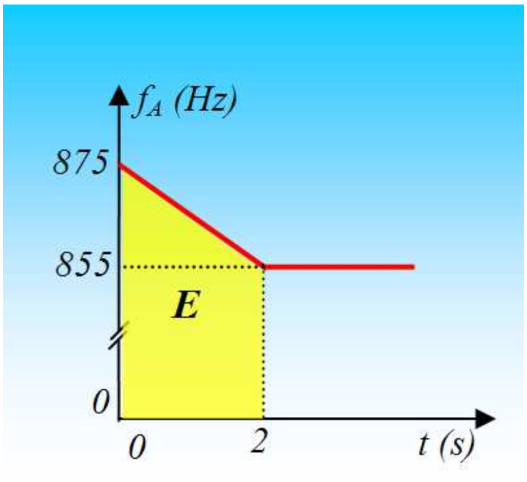
$$\Sigma F = m_2 \alpha \rightarrow -T = m_2 a \rightarrow \mu \cdot m_2 g = m_2 a \rightarrow a = -\mu g = -4m/s^2$$

Οπότε το σώμα Σ_2 αποκτά ταχύτητα V_κ σε χρονική διάρκεια Δt:

$$\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \alpha = \frac{V_\kappa - u_2'}{t_1 - 0} \rightarrow t_1 = \frac{V_\kappa - u_2'}{a} = \frac{2 - 10}{-4} = 2\text{s}$$

Το σώμα Σ_2 ολισθαίνει πάνω στη σανίδα για χρονική διάρκεια Δt=2s. Σ' Αυτήν την χρονική διάρκεια λαμβάνει ορισμένο πλήθος N_A ηχητικών κυμάτων ων που εκπέμπονται από την πηγή S. Εάν η συχνότητα που κατέγραφε ο δέκτης ήταν ίση με αυτή που εκπέμπει η πηγή, τότε όσα κύματα εκπέμπει η πηγή σε ορισμένη χρονική διάρκεια τόσα λαμβάνει και ο δέκτης. Εάν όμως η οι συχνότητες αυτές διαφέρουν τότε ο χρόνος εκπομπής και λήψης διαφέρουν.

Έστω N_S ο αριθμός των κυμάτων που εκπέμπει η πηγή σε χρονική διάρκεια Δt_S και N_A ο αριθμός των κυμάτων που καταγράφει ο δέκτης σε χρόνο Δt_A. Όσα κύματα εκπέμπει η πηγή τόσα καταγράφει ο δέκτης. Ο αριθμός των μεγίστων των κυμάτων καταγράφονται από τον δέκτη υπολογίζεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο διάγραμμα $f_A=f(t)$.



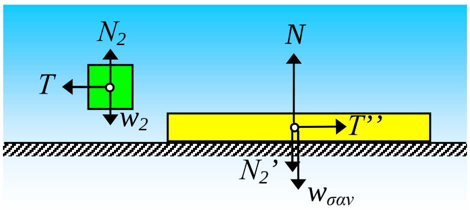
$$N_A=E=\frac{(855+875)\cdot 2}{2}=1730$$

Όμως:

$$N_A=N_S \rightarrow N_A=f_S\cdot\Delta t_S \rightarrow \Delta t_S=\frac{N_A}{f_S}$$

$$\boldsymbol{\Delta t_S=2{,}035s}$$

ε) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα και σανίδα ξεχωριστά., όπου T=T'(δράση-αντίδραση) και $N_2=N_2'$(δράση-αντίδραση).



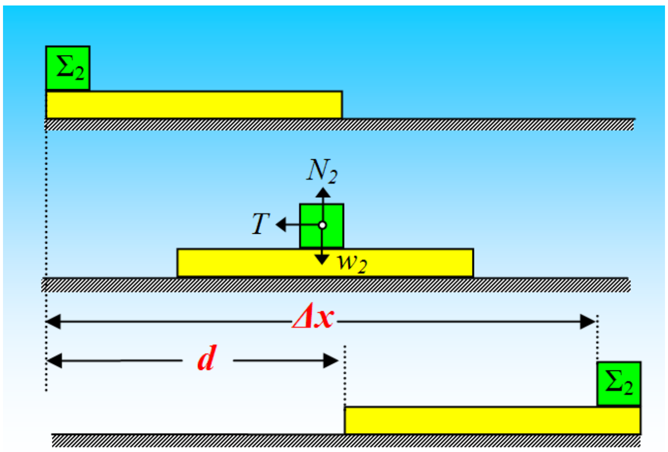
Για το σώμα έχουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_2=m_2g \rightarrow N_2=10N$$

Για την σανίδα έχουμε:

$$\Sigma F_x=M\cdot\alpha_1 \rightarrow T'=M\cdot\alpha_1 \rightarrow \mu m_2 g=M\cdot\alpha_1 \rightarrow \alpha_1=\frac{\mu\cdot m_2\cdot g}{M} \rightarrow \alpha_1=1m/s^2$$

Σε χρόνο $\Delta t=t_1-0=2s$, το Σ_2 μετατοπίζεται ως προς το ακίνητο έδαφος κατά:



$\Delta x_2 = u_2't_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = 10 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-4) \cdot 2^2 = 20 - 8 = 12m$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα η σανίδα μετατοπίζεται ως προς το ακίνητο έδαφος κατά:

$$d = \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2m$$

Συνεπώς το σώμα Σ_2 μετατοπίζεται πάνω στη σανίδα κατά

$$\Delta x_2 - d = 10m$$

Από την χρονική στιγμή t_1 και μετά δεν υπάρχει σχετική μετατόπιση του Σ_2 πάνω στη σανίδα, δεδομένου ότι κινούνται με κοινή ταχύτητα. Οπότε το ελάχιστο μήκος της σανίδας είναι:

$$L = 10m$$

στ)Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για το Σ_2 από την χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι και να αποκτήσει ταχύτητα V_K. Από την στιγμή t_1 και μετά η T μηδενίζεται. Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_2V_k^2 - \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = W_T \rightarrow W_T = \frac{1}{2}1 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 2 - 50 \rightarrow$$

$$W_T = -48J$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για τη σανίδα από την χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι και να αποκτήσει ταχύτητα V_K. Από την στιγμή t_1 και μετά η T' μηδενίζεται. Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}MV_k^2 - 0 = W_{T'} \rightarrow W_{T'} = \frac{1}{2}4 \cdot 2^2 \rightarrow$$

$$W_{T'} = 8J$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις T και T' αν και έχουν ίσα μέτρα ως δράση-αντίδραση δεν έχουν αντίθετα έργα. **Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα έργο μίας δύναμης δεν εξαρτάται μόνο από το μέτρο της αλλά και από την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της**. Οι δυνάμεις T και T' ασκούνται σε σημεία που έχουν διαφορετική ταχύτητα, άρα οι μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής τους είναι διαφορετικές και ως εκ τούτου και τα έργα τους.

ζ) Για την συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$f_A = \frac{u_{\eta\chi} + u_2}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S = \frac{u_{\eta\chi} + u_2' + \alpha \cdot t}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S = \frac{u_{\eta\chi} + u_2'}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S + \frac{\alpha \cdot f_S}{u_{\eta\chi}} \cdot t$$

$$f_A = \frac{u_{\eta\chi} + u_2}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S = \frac{u_{\eta\chi} + u_2' + \alpha \cdot t}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S = \frac{u_{\eta\chi} + u_2'}{u_{\eta\chi}} \cdot f_S - \frac{\mu \cdot g \cdot f_S}{u_{\eta\chi}} \cdot t$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση της συχνότητας που καταγράφει ο δέκτης αμέσως μετά την κρούση είναι πρωτοβάθμια εξίσωση του χρόνου, και ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας ισούται με τον σταθερό παράγοντα μπροστά από τον χρόνο t. Οπότε:

$$\frac{\Delta f_A}{\Delta t} = -\frac{\mu \cdot g \cdot f_S}{u_{\eta\chi}} \rightarrow \mu = -\frac{\frac{\Delta f_A}{\Delta t} \cdot u_{\eta\chi}}{g \cdot f_S} = -\frac{(-5) \cdot 340}{10 \cdot 850}$$

μ=0,2

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος