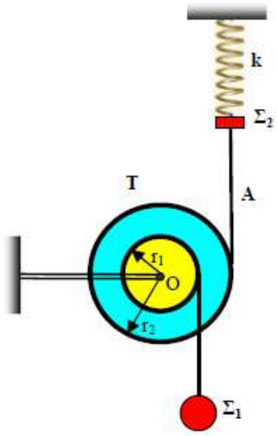
Ισορροπία – περιστροφή - ταλάντωση



Μια διπλή τροχαλία Τ, αποτελείται από δυο ομόκεντρες ομογενείς τροχαλίες με ακτίνες r_1 = 0,2 m , r_2 = 0,4 m και μάζες M_1 =M_2 = 3,2 kg . Οι δυο τροχαλίες συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές, σαν ένα στερεό γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο τους Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό τους.

Στα αυλάκια των τροχαλιών, έχουν τυλιχτεί δυο αβαρή σταθερού μήκους νήματα, στα ελεύθερα άκρα των οποίων είναι δεμένα τα σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ με μάζες m_1 = 2 kg , m_2 = 3 kg αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα $Σ_2$, είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m , και το σύστημα ισορροπεί σε ηρεμία. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο.

Α. Να υπολογίσετε τις τάσεις των νημάτων και τη επιμήκυνση του ελατηρίου.

Β . Κόβουμε το νήμα που συνδέει το σώμα $Σ_2$ με την μεγάλη τροχαλία στο σημείο Α.

Να υπολογίσετε:

i) Την μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα $Σ_2$.

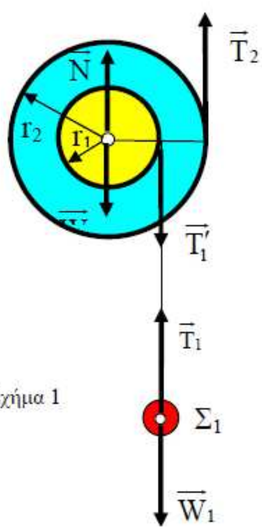
ii) Την επιτάχυνση του σώματος $Σ_1$.

iii) Την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$, τη χρονική στιγμή που το $Σ_2$ θα σταματήσει να κινείται για δεύτερη φορά, μετά τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται.

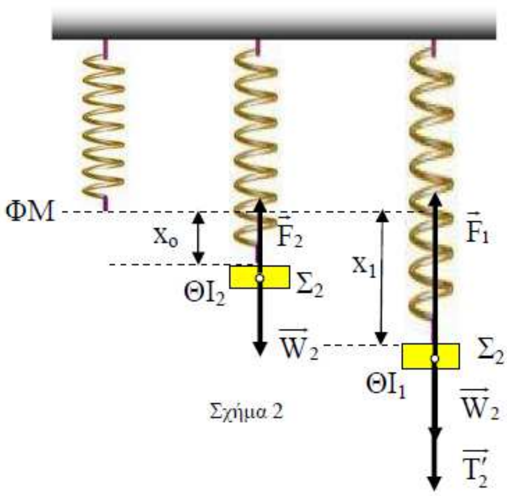
iv) Την γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας, τη χρονική στιγμή που το $Σ_1$ θα έχει μετατοπιστεί κατά h = 16 m από το σημείο που ξεκίνησε να κινείται.

Δίνεται g = 10 m/s² και ότι η ροπή αδράνειας τροχαλίας μάζας Μ και ακτίνας R ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της, υπολογίζεται με τη σχέση $I_{cm}= ½MR^2$.

Απάντηση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Α. Από την ισορροπία του σώματος $Σ_1$ – σχήμα 1– έχουμε ότι

$$\vec{W}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \text{ ή } W_1 = T_1 \text{ ή } T_1 = m_1 g \text{ ή } T_1 = 20N$$

Από την ισορροπία του νήματος $T_1' = T_1 = 20N$ (1)

Από την ισορροπία της τροχαλίας έχουμε τελικά ότι

$$T_1' r_1 = T_2 r_2 \text{ ή } T_2 = \frac{T_1' r_1}{r_2} \text{ και με βάση την (1) } T_2 = 10N \text{ (2)}$$

Από την ισορροπία του σώματος $Σ_2$ – σχήμα 2 , $ΘΙ_1$ – έχουμε ότι

$$\vec{F}_1 + \vec{W}_2 + \vec{T_2'} = \vec{0} \text{ ή } F_1 = W_2 + T_2' \text{ και από την ισορροπία του νήματος } T_2 = T_2' \text{ άρα}$$

$$F_1 = W_2 + T_2 \text{ ή } kx_1 = m_2 g + T_2 \text{ ή } x_1 = \frac{m_2 g + T_2}{k} \text{ ή } x_1 = 0{,}4 \text{ m (3)}$$

i) Στη $ΘΙ_1$ του σχήματος 2 το σώμα $Σ_2$ ισορροπεί μέχρι το κόψιμο του νήματος , οπότε παύει να του α-σκείται η δύναμη $\vec{T_2'}$.

Μετά το κόψιμο του νήματος , ξεκινά από τη θέση αυτή – ακραία θέση – να ταλαντώνεται και αποκτά μέγιστη ταχύτητα στο κέντρο της ταλάντωσής του – $ΘΙ_2$.

Στη $ΘΙ_2$ ισχύει ότι $\vec{F}_2 + \vec{W}_2 = \vec{0}$ ή $kx_o = m_2 g$ ή $x_o = \frac{m_2 g}{k}$ ή $x_o = 0{,}3$ m (4)

Η μέγιστη ταχύτητα λοιπόν θα έχει μέτρο $υ_{max} = ωA = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \cdot (x_1 - x_o)$ (5)

Από τη σχέση (5) με βάση τις (3) , (4) και τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει

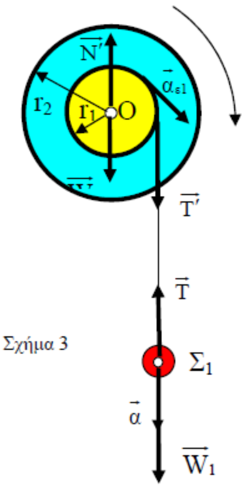
$$υ_{max} = \frac{\sqrt{3}}{3} m/s$$

ii) Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε

$$Στ_{(O)} = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$τ_{w(O)} + τ_{N'(O)} + τ_{T'(O)} = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$0 + 0 + T' \cdot r_1 = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \quad (6)$$



Σχήμα 3

Για την μεταφορική κίνηση του σώματος $Σ_1$ ισχύει ότι

$$w_1 - T = m_1 α \quad (7)$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει ότι

$$T = T' \quad (8)$$

και επειδή το νήμα δεν γλιστρά στην περιφέρεια της τροχαλίας

$$\boldsymbol{α_{ε1} = α} \quad (9)$$

$$\text{Αλλά } α_{ε1} = \frac{dυ_{γρ1}}{dt} = \frac{d(ωr_1)}{dt} = \frac{dω}{dt} r_1 = α_{γων} r_1 \quad (10)$$

$$\text{Εξ' άλλου } I_{ολ(O)} = \frac{1}{2}M_1 r_1^2 + \frac{1}{2}M_2 r_2^2 \quad (11)$$

Από τις (6), (7), (8), (9), (10), (11) προκύπτει ότι

$$\alpha = \frac{m_1 g}{m_1 + 2,5M_1} \text{ ή } \alpha = 2m/s^2 \quad (12)$$

iii) Το σώμα $Σ_2$ ακινητοποιείται για δεύτερη φορά μετά που θα αρχίσει η ταλάντωση του, τη χρονική στιγμή $t = T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = \frac{2\pi}{10}\sqrt{3}$ s. (13)

Το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_1$ δίνεται από τη σχέση $υ = αt$ και με βάση τις (12) και (13) προκύπτει

$$υ = \frac{4\pi}{10}\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

iv) Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$m_1 g h = \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2}I_{ολ(O)}\omega_1^2 \quad (14)$$

και επειδή το νήμα δεν γλιστρά $υ_1 = \omega_1 r_1$ (15)

Από την (14) με βάση τις (11) και (15) προκύπτει $\omega_1 = 40$ rad/s .

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης