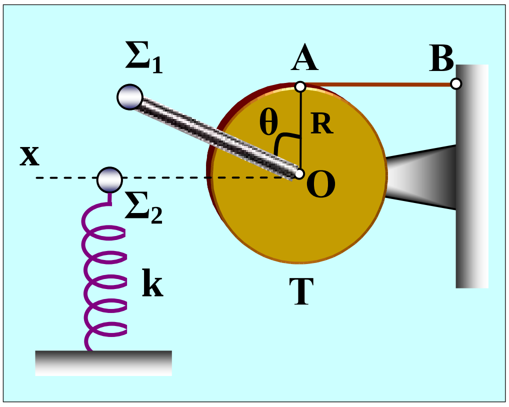
Ισορροπία – περιστροφή – κρούση – ταλάντωση



Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 2R$ και μάζας $M_\rho = 3m$, έχει στο ένα της άκρο στερεωμένο σημειακό σφαιρίδιο Σ_1 μάζας $m_1 = m = (1/20)$ kg, και είναι κολλημένη στο επίπεδο μιας τροχαλίας Τ μάζας $M = 4m$ και ακτίνας $R = (1/20)$ m , όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου Ο , είναι το κέντρο της τροχαλίας. Το σύστημα των τριών αυτών σωμάτων , μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές , γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στο κατακόρυφο επίπεδο της τροχαλίας, και διέρχεται από το κέντρο της Ο.

Αρχικά, το σύστημα ηρεμεί σε ισορροπία, με τη βοήθεια οριζόντιου αβαρούς και ανελαστικού νήματος ΑΒ, που έχει το ένα του άκρο Α δεμένο στο ανώτερο σημείο της τροχαλίας, και το άλλο Β, σε κατακόρυφο τοίχο.

Α. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.

Β. Κόβουμε το νήμα. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω μεγεθών αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος:

Β1. γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος

Β2. μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου Σ_1.

Γ. Τη χρονική στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια, το σφαιρίδιο Σ_1 χτυπά πάνω σε σημειακή σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 10m$ που ηρεμεί σε ισορροπία, δεμένη στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200$ N/m. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο.

Αν η κρούση το συστήματος με τη σφαίρα Σ_2 είναι ελαστική , διαρκεί αμελητέο χρόνο, και μετά απ' αυτήν , η φορά περιστροφής του συστήματος των τριών σωμάτων αντιστρέφεται , να υπολογίσετε:

Γ1. Τη γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου Σ_1 ακριβώς πριν την κρούση.

Γ2. Τη γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου Σ_1 και την ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση.

Δ. Μετά την κρούση, το σύστημα των τριών σωμάτων συγκρατείται ακίνητο στην ανώτερη θέση που φτάνει, ενώ το σύστημα ελατήριο - σφαίρα Σ_2 , κάνει απλή αρμονική ταλάντωση , χωρίς αρχική φάση.

Να υπολογίσετε:

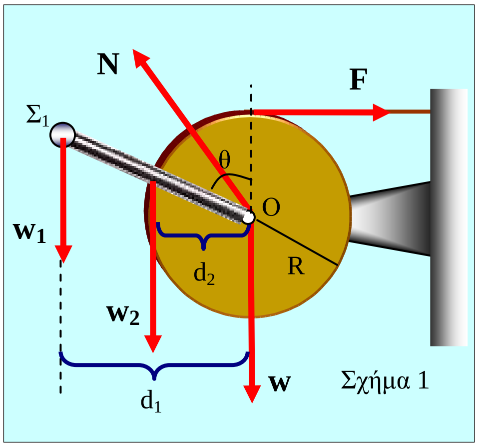
Δ1. Την εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου για την ταλάντωση αυτή

Δ2, Τη μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας Σ_2 ως προς το Ο , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι την $t = T/2$, όπου Τ η περίοδος της ταλάντωσης.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου $I_\rho = M_\rho \ell^2/3$ και της τροχαλίας $I_T = MR^2/2$, $g = 10 m/s^2$ και η γωνία $\theta = 60^o$.

Απάντηση

Α. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα φαίνονται στο σχήμα 1 και είναι :



Σχήμα 1

το βάρος $\mathbf{w_1}$ του σφαιριδίου $Σ_1$, το βάρος $\mathbf{w_2}$ της ράβδου , το βάρος της τροχαλίας **w** , η δύναμη **N** από τον άξονα και η δύναμη **F** από το νήμα. Επειδή το σύστημα ισορροπεί θα είναι

$$Στ_{(O)} = 0 \text{ ή } τ_{w1} + τ_{w2} + τ_w + τ_N + τ_F = 0 \text{ ή}$$

$$w_1 d_1 + w_2 d_2 + 0 + 0 - FR = 0 \text{ ή}$$

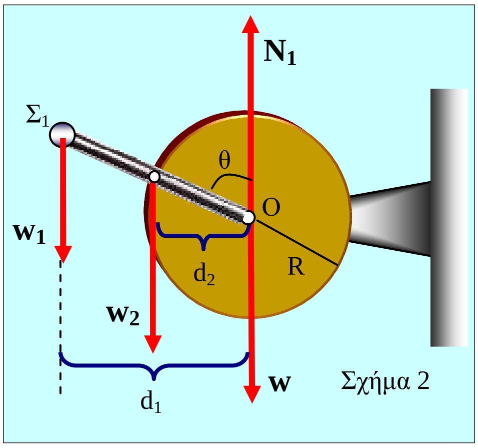
$$w_1 d_1 + w_2 d_2 = FR \text{ ή}$$

$$mgl\,ημθ + 3mg\frac{l}{2}ημθ = FR$$

$$mg2Rημθ + 3mg\frac{2R}{2}ημθ = FR \text{ ή}$$

$$F = 5mgημθ \text{ ή } F = 5mg\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{άρα } F = \frac{5\sqrt{3}}{4}N$$

Β1.



Σχήμα 2

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος δεν θα ασκείται η δύναμη **F** - σχήμα 2- και θα έχουμε

$$τ_{w1} + τ_{w2} + τ_w + τ_N = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$w_1 d_1 + w_2 d_2 = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

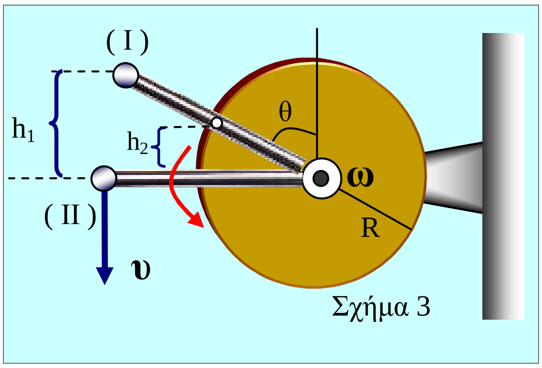
$$mgl\,ημθ + 3mg\frac{l}{2}ημθ = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$mg2Rημθ + 3mg\frac{2R}{2}ημθ = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \quad \text{ή}$$

$$5mgRημθ = I_{ολ(O)} \cdot α_{γων} \quad (1)$$

Με βάση το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων έχουμε ότι

$$I_{ολ(O)} = I_T + I_ρ + I_Σ = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}M_ρ l^2 + m_1 l^2 \text{ ή } I_{ολ(O)} = \frac{1}{2}4mR^2 + \frac{1}{3}3m(2R)^2 + m(2R)^2 = 10mR^2 \ (2)$$



Σχήμα 3

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$5mgRημθ = 10mR^2 \cdot α_{γων} \text{ ή } α_{γων} = \frac{gημθ}{2R} \text{ άρα}$$

$$α_{γων} = 50\sqrt{3}\,rad/s^2$$

Β2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου Σ1 είναι

$$\frac{dL_1}{dt} = I_\Sigma \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = m(2R)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\sqrt{3}}{40} kgm^2/s^2$$

Γ1. Με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας από τη θέση (Ι) μέχρι τη θέση (ΙΙ) – σχήμα 3 - έχουμε ότι

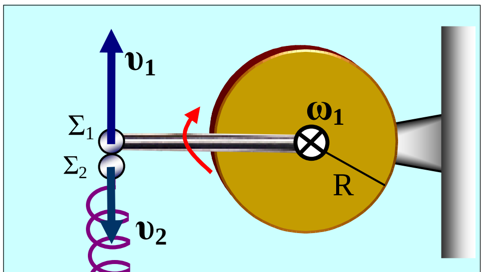
$$\left.\begin{aligned} m_1gh_1 + M_\rho gh_2 &= \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(O)}\omega^2 \\ h_1 &= l\,\text{συν}60^o = 2R \cdot \frac{1}{2} = R \\ h_2 &= \frac{l}{2}\text{συν}60^o = \frac{2R}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2} \end{aligned}\right\}$$

και με βάση την (2)

$$mgR + 3mg\frac{R}{2} = \frac{1}{2}10mR^2\omega^2 \text{ ή } \frac{5g}{2} = 5R\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10\text{rad/s}$$

Αλλά $\upsilon = \omega \cdot l = \omega \cdot 2R = 10\frac{rad}{s} \cdot 2 \cdot \frac{1}{20}m$ άρα **υ = 1m/s** με φορά κατακόρυφη προς τα κάτω όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

Γ2. Επειδή η κρούση γίνεται σε αμελητέο χρόνο , οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων δεν προκαλούν μεταβολή στην στροφορμή του συστήματος (είναι $\Delta L = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \cdot \Delta t$ με $\Delta t \to 0$), κατά συνέπεια ισχύει η αρχή της διατήρησης της στροφορμής για την κρούση κι έχουμε ότι



Σχήμα 4

$I_{\text{ολ}(O)}\omega = m_2\upsilon_2 l - I_{\text{ολ}(O)}\omega_1$ και με βάση τη (2)

$10mR^2\omega = 10m\upsilon_2 2R - 10mR^2\omega_1$ ή

$$\omega + \omega_1 = \frac{2\upsilon_2}{R} \quad (3)$$

Με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι

$\frac{1}{2}I_{\text{ολ}(O)}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(O)}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$ και με βάση την (2)

$10mR^2\omega^2 = 10mR^2\omega_1^2 + 10m\upsilon_2^2$ ή

$R^2\left(\omega^2 - \omega_1^2\right) = \upsilon_2^2$ ή $(\omega - \omega_1)(\omega + \omega_1) = \frac{\upsilon_2^2}{R^2}$ και με βάση την (3)

$$\frac{2\upsilon_2}{R}(\omega - \omega_1) = \frac{\upsilon_2^2}{R^2} \quad \text{ή} \quad (\omega - \omega_1) = \frac{\upsilon_2}{2R} \quad (4)$$

Από το σύστημα των (3) και (4) προκύπτει ότι

$2\omega = \frac{2\upsilon_2}{R} + \frac{\upsilon_2}{2R} = \frac{5\upsilon_2}{2R}$ ή $\upsilon_2 = \frac{4\omega R}{5} = \frac{4 \cdot 10 \cdot (1/20)}{5}\frac{m}{s} = 0,4\frac{m}{s}$ άρα το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι **υ_2 = 0,4m/s** (5) και η φορά της όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

$$\omega_1 = \frac{2\upsilon_2}{R} - \omega = \frac{2\cdot 0,4\text{m/s}}{(1/20)\text{m}} - 10\text{rad/s} = 6\text{rad/s}$$

$$\upsilon_1 = \omega_1 \cdot l = \omega_1 \cdot 2R = 6\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 2\cdot\frac{1}{20}\text{m} = 0,6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

άρα το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου $Σ_1$ αμέσως μετά την κρούση είναι **υ_1 = 0,6m/s** και η φορά της όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

Δ1. Επειδή δίνεται ότι δεν υπάρχει αρχική φάση, η εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου θα είναι της μορφής

$y = Aημ(\omega_τ t)$ όπου $\omega_τ$ η γωνιακή συχνότητα. Άρα

$$k = m_2\omega_τ^2 \;\; ή \;\; \omega_τ = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{200\text{N/m}}{10/20\text{kg}}} = 20\,\text{rad/s}$$

Κι επειδή τη χρονική στιγμή t =0 που αρχίζει η ταλάντωση το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του θα είναι $\upsilon_2 = \upsilon_{max}$ και

$$\upsilon_2 = \omega_τ A \;\; ή \;\; A = \frac{\upsilon_2}{\omega_τ} = \frac{0,4\text{m/s}}{20\text{rad/s}} = 0,02\text{m}$$

οπότε y = 0,02ημ(20t) SI

Δ2. Την χρονική στιγμή t = T/2 η σφαίρα $Σ_2$ επιστρέφει στη θέση ισορροπίας της με αντίθετη ταχύτητα

Η μεταβολή της στροφορμής της θα είναι

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ} \;\; ή \;\; \Delta L = -m_2\upsilon_2 l - m_2\upsilon_2 l = -2m_2\upsilon_2 l = -2\cdot 10m\upsilon_2\cdot 2R$$

$$ή \;\; \Delta L = -40m\upsilon_2 R = -40\cdot\frac{1}{20}\text{kg}\cdot 0,4\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{20}\text{m} = -0,04\frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$$

και $\Delta\vec{L} \otimes$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης