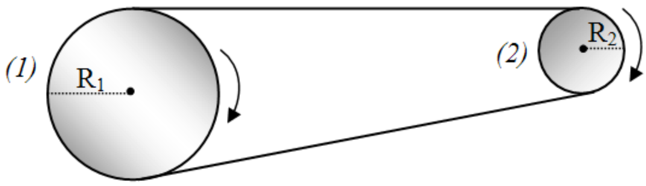
Ιμάντας και κύλιση χωρίς ολίσθηση πάνω σ' αυτόν



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο δίσκοι με ακτίνες R_1**=0,6m** και R_2**=0,3m** αντίστοιχα, οι οποίοι συνδέονται με ιμάντα, το οριζόντιο τμήμα του οποίου έχει μήκος ***8m***. Οι δίσκοι μπορούν να περιστρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους και αρχικά είναι ακίνητοι. Τη χρονική στιγμή ***t=0*** προσδίδουμε στο δίσκο (1) σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{1,\gamma}=5rad/s^2$, οπότε οι δύο δίσκοι ξεκινούν να περιστρέφονται δεξιόστροφα χωρίς ο ιμάντας να γλιστρά στην περιφέρειά τους. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου (1) την χρονική στιγμή $t_1=2s$

β) της επιτρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του δίσκου (2) και το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης

Την ***t=0*** από σημείο που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα περιστροφής του δίσκου (1), τοποθετείται μικρός τροχός ακτίνας ***r=0,05m*** και με τη δράση κατάλληλης δύναμης αποκτά σταθερή επιτάχυνση α_{cm} με φορά προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma=20rad/s^2$ έτσι ώστε ο τροχός να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στον ιμάντα, χωρίς αυτός να λυγίζει. Να υπολογίσετε το:

γ) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου.

δ) την ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού που απέχει απόσταση ***3R/2*** από τον ιμάντα την χρονική στιγμή ***1s***.

ε) την χρονική στιγμή που ο τροχός εγκαταλείπει τον ιμάντα.

Λύση:

α) $\omega=\alpha_{1,\gamma}\cdot t_1 \rightarrow \boldsymbol{\omega=10rad/s}$

β) Τα σημεία του ιμάντα έχουν όλα την ίδια γραμμική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_b}$ και επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha_b}$, και αφού ο ιμάντας δεν ολισθαίνει, τα μεγέθη αυτά θα είναι ίσα με τα αντίστοιχα επιτρόχια μεγέθη των σημείων της περιφέρειας των δύο δίσκων.

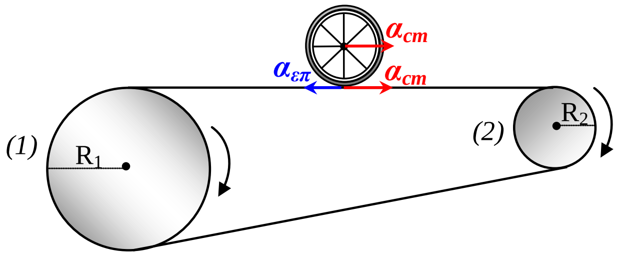
Άρα:

$$\alpha_{2,\varepsilon\pi}=\alpha_{1,\varepsilon\pi}=\alpha_{1,\gamma}\cdot R_1=5\cdot 0,6=\boldsymbol{3m/s^2}$$

Όμως:

$$\alpha_{2,\varepsilon\pi}=\alpha_{2,\gamma}\cdot R_2 \qquad \text{οπότε} \quad \alpha_{2,\gamma}=\frac{\alpha_{2,\varepsilon\pi}}{R_2}=\boldsymbol{10rad/s^2}$$

γ) Ο τροχός πάνω στον ιμάντα εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί το αποτέλεσμα μίας μεταφορικής και μίας περιστροφικής γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του τροχού. Η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου του τροχού που είναι σε επαφή με τον ιμάντα θα είναι:



$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon\pi}$$

Οπότε:

$$\alpha = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma} R$$

Επειδή όμως ο τροχός δεν ολισθαίνει πάνω στον ιμάντα, το κατώτερο σημείο του τροχού έχει επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του σημείου του ιμάντα με το οποίο είναι σε επαφή. Η επιτάχυνση των σημείων του ιμάντα είναι ίση με την επιτρόχιο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας των δίσκων τους οποίους θέτει σε κίνηση.

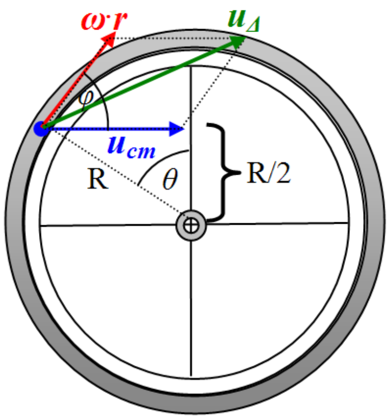
Δηλαδή:

$$\alpha = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma} R = \alpha_b$$

απ’ όπου προκύπτει

$$\alpha_{cm} = \alpha_b + \alpha_{\gamma} R \rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm} = 4 m/s^2}$$

δ) Όπως φαίνεται στο σχήμα οι φορείς των ταχυτήτων σε ένα σημείο Δ της περιφέρειας του τροχού που απέχει 3R/2 από τον ιμάντα σχηματίζουν γωνία φ, η οποία είναι ίση με την γωνία Θ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές). Όμως:



$$\text{συνθ} = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \varphi = 60^o$$

Το σημείο Δ έχει μέτρο ταχύτητας:

$$u_{\Delta} = \sqrt{u_{cm}^2 + (\omega \cdot R)^2 + 2u_{cm} \cdot (\omega \cdot R) \cdot \sigma\upsilon\nu 120^o}$$

Και επειδή έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση

$$u_{cm} = \omega \cdot R$$

οπότε:

$$u_{\Delta} = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{cm}^2 + 2u_{cm}^2 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)}$$

$$u_{\Delta} = u_{cm}\sqrt{3} = a_{cm} t\sqrt{3}$$

Άρα: $\boldsymbol{u_{\Delta} = 4\sqrt{3}\ m/s}$

ε) $x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot x_{cm}}{a_{cm}}} \rightarrow \boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{s}$

Επιμέλεια
Πέτρος Καραπέτρος