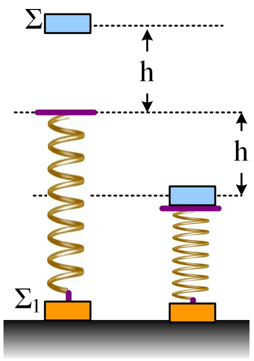
Θα ανυψωθεί το σώμα και θα εγκαταλείψει το έδαφος;

Αφήνουμε ένα σώμα Σ μάζας m να πέσει από ύψος h πάνω σε ένα κατακόρυφο ελατήριο, το άλλο άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο με δεύτερο σώμα $Σ_1$ ίσης μάζας που ηρεμεί στο έδαφος, όπως στο σχήμα. Στο πάνω άκρο του ελατηρίου υπάρχει ένας αβαρής δίσκος στον οποίο το σώμα Σ προσκολλάται κατά την πρόσκρουση. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι επίσης h.



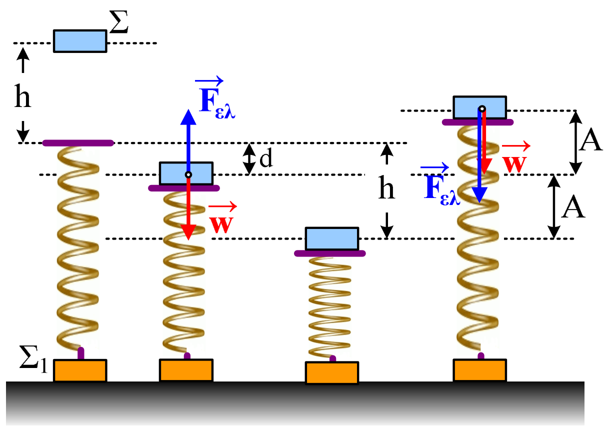
i) Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ είναι:

$$a)\ \sqrt{2gh} \quad β)\ 1{,}5\sqrt{gh} \quad γ)\ \sqrt{3gh} \quad δ)\ 2\sqrt{gh}$$

ii) Κατά την κίνησή του προς τα πάνω, το σώμα Σ, θα παρασύρει και το $Σ_1$ ώστε να εγκαταλείψει το έδαφος;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας, λαμβάνοντας σαν δεδομένο ότι η κίνηση του σώματος Σ όταν βρίσκεται πάνω στο δίσκο είναι ΑΑΤ..

Απάντηση:



Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κάτω ακραία θέση (κ.Α.Θ.) και εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης που αφέθηκε το σώμα Σ να κινηθεί και της θέσης αυτής (μηδενισμού της ταχύτητας), έχουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ} = K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$0+mg\cdot 2h = 0+ ½\, kh^2 \rightarrow$$

$$h=\frac{4mg}{k} \quad (1)$$

i) Το σώμα επιταχύνεται με επιτάχυνση g μέχρι να πέσει στο δίσκο, ενώ κατόπιν εκτελεί ΑΑΤ και επιταχύνεται επίσης μέχρι να φτάσει στη θέση ισορροπίας, η οποία βρίσκεται σε απόσταση d, από τη θέση φυσικού μήκους. Συνεπώς εκεί θα έχει και τη μέγιστη ταχύτητα. Αλλά για τη θέση ισορροπίας έχουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=mg \rightarrow k\cdot d =mg \rightarrow$$

$$d=\frac{mg}{k}=\frac{1}{4}h \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τη μέγιστη ταχύτητα στη θέση ισορροπίας, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση ισορροπίας, όπως και παραπάνω, αλλά ας χρησιμοποιήσουμε τώρα εναλλακτικά ιδέες ταλάντωσης, για τον υπολογισμό μας.

Από τις σχέσεις (1) και (2) και με βάση το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι:

$A=h-d=\frac{3}{4}h$, οπότε από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$K_{max}=U_{max} \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2=\frac{1}{2}kA^2 \text{ ή}$$

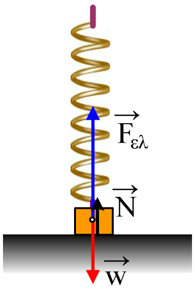
$$\upsilon_{max}=A\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{3}{4}h\sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{(1)} \upsilon_{max}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4gh^2}{h}}=1,5\sqrt{gh}$$

Άρα σωστή είναι η β) πρόταση.

ii) Το σώμα Σ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του, θα κινηθεί προς τα πάνω και **αν υποθέσουμε ότι το Σ_1 θα παραμένει ακίνητο**, τότε το Σ εκτελεί ΑΑΤ, φτάνοντας σε μέγιστη προς τα πάνω απομάκρυνση ίση με $A=\frac{3}{4}h$. Αλλά τότε στη θέση αυτή το ελατήριο έχει επιμήκυνση Δℓ=A-d = ½ h και η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο $F_{ελ}=k\cdot\Delta\ell=k\cdot\frac{1}{2}h \xrightarrow{(1)} k\cdot\frac{1}{2}\frac{4mg}{k}=2mg$, δηλαδή διπλάσια του βάρους του σώματος.

Ας έρθουμε τώρα στο κάτω σώμα Σ_1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1, στην περίπτωση που το ελατήριο είναι τεντωμένο. Αν το σώμα ισορροπεί ΣF=0 ή $F_{ελ}+N-mg=0$ ή

$$N=mg-F_{ελ}$$



Αν λοιπόν δεχθούμε την υπόθεση ότι το σώμα Σ έφτασε στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής του, ενώ το σώμα Σ_1 παραμένει σε επαφή με το έδαφος, τότε N= - mg !!! δηλαδή η δύναμη στήριξης από το έδαφος, έχει φορά προς τα κάτω. Άτοπον.

Κατά συνέπεια, πολύ πριν φτάσει το Σ στη μέγιστη προς τα πάνω απομάκρυνσή του, το τεντωμένο ελατήριο, τραβά το σώμα Σ_1 και το ανυψώνει.

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε άλλη αποδεικτική πορεία, θεωρώντας ότι κάποια στιγμή το σώμα Σ_1 χάνει την επαφή με το έδαφος, οπότε N=0 και από εκεί να βρίσκαμε την θέση του σώματος Σ, για την οποία συμβαίνει αυτό. Το αποτέλεσμα θα ήταν ότι, όταν το ελατήριο επιμηκυνθεί κατά d, το κάτω σώμα θα χάσει την επαφή. Αλλά κάτι τέτοιο δεν μας υποχρεώνει να το κάνουμε το ερώτημα που δόθηκε.

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης