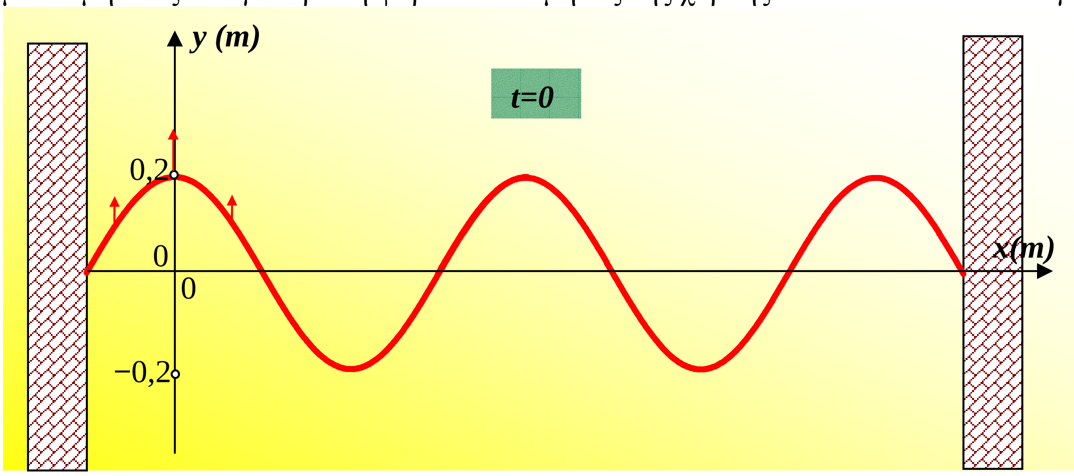
Επαναληπτική άσκηση στο στάσιμο κύμα;

Μια ομογενής και λεπτή χορδή σταθερού πάχους με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της στάσιμο κύμα με 4 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Την t=0 που φαίνεται στο παρακάτω στιγμιότυπο η κινητική ενέργεια κάθε ταλαντούμενου σημείου της χορδής ισούται με τα ¾ της ολικής ενέργειας ταλάντωσής του, ενώ μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{1}{30}s$ η κινητική ενέργεια του κάθε σημείου μηδενίζεται για πρώτη φορά. Αν το μήκος της χορδής είναι L=1m να υπολογίσετε:



α) την απόσταση ενός δεσμού από την μεθεπόμενη κοιλία

β) το πλάτος ταλάντωσης των κοιλιών

γ) την απόσταση ενός δεσμού από την μεθεπόμενη κοιλία όταν τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται έχουν μηδενική κινητική ενέργεια

δ) την συχνότητα με την οποία ευθυγραμμίζονται με τον ημιάξονα Ox τα σημεία της χορδής. Θεωρώντας ως x=0 τη θέση της 1ης κοιλίας (από το αριστερό άκρο της χορδής):

ε) να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος

στ) η διαφορά φάσης δύο σημείων της χορδής που απέχουν από το άκρο O αποστάσεις 0,25m και 0,85m.

ζ) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο την χρονική στιγμές στιγμές $t_1=\frac{1}{12}s$, $t_2=\frac{1}{10}s$ και $t_3=\frac{2}{15}s$ στο ίδιο σύστημα αξόνων

η) την επί τοις % μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης της χορδής, ώστε ο αριθμός των δεσμών μεταξύ των άκρων να ελαττωθεί κατά ένας.

Λύση:

α) Από το στιγμιότυπο προκύπτει

$$L=\frac{5\lambda}{2}\Rightarrow \lambda=\frac{2L}{5}\Rightarrow \lambda=0{,}4m$$

Η απόσταση ενός δεσμού από την επόμενη κοιλία στο στάσιμο κύμα είναι $\frac{\lambda}{4}$, ενώ η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών ισούται με $\frac{\lambda}{2}$, οπότε η απόσταση ενός δεσμού από την μεθεπόμενη κοιλία είναι:

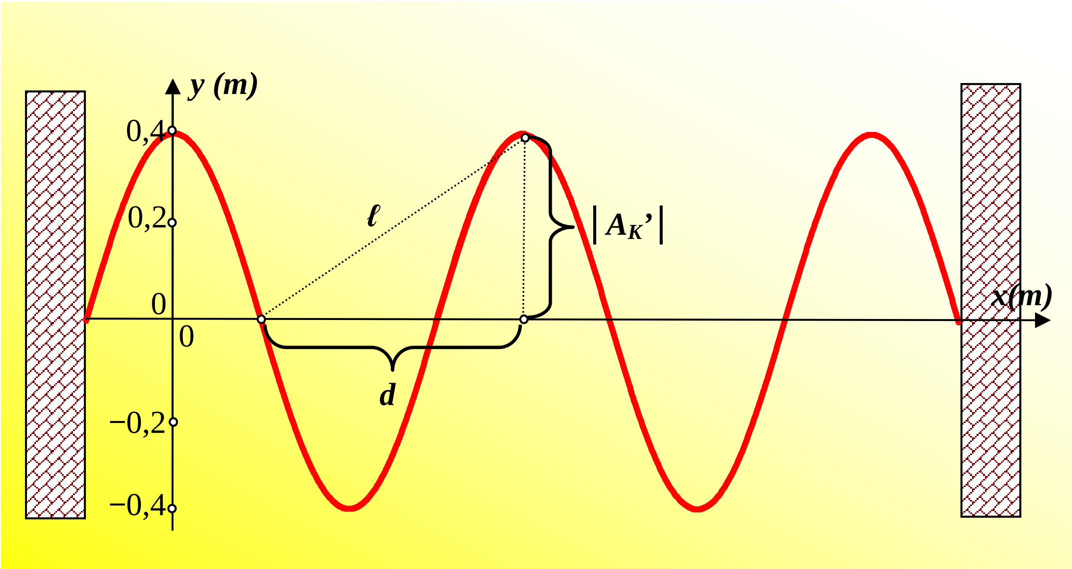
$$d=\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=\frac{3\lambda}{4}\Rightarrow \boldsymbol{d=0{,}3m}$$

β) Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε για τη χρονική στιγμή t=0 έχουμε:

$$K+U=E_T \Rightarrow \frac{3}{4}E+U=E \Rightarrow U=\frac{1}{4}E \Rightarrow \frac{1}{2}Dy^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}D|A'|^2 \Rightarrow |y|=\frac{|A'|}{2}$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή t=0 όλα τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στο μέσο της διαδρομής τους για να φτάσουν στην ακραία θέση τους. Σύμφωνα με το στιγμιότυπο, τη χρονική στιγμή t=0 οι κοιλίες βρίσκονται στη θέση $|y|=0{,}2m$, οπότε

$$0{,}2=\frac{|A_\kappa'|}{2} \Rightarrow \boldsymbol{|A_\kappa'|=0{,}4m}$$



γ) Όταν μηδενίζεται η κινητική ενέργεια ταλάντωσης των σημείων της χορδής, αυτά θα πρέπει να βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η απόσταση ενός δεσμού από την μεθεπόμενη κοιλία όταν μηδενίζεται η κινητική ενέργεια της κοιλίας είναι:

$$\ell=\sqrt{d^2+|A_\kappa'|^2}=\sqrt{0{,}3^2+0{,}4^2} \Rightarrow \boldsymbol{\ell=0{,}5m}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t=0 τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται στη θέση $|y|=\frac{|A'|}{2}$.

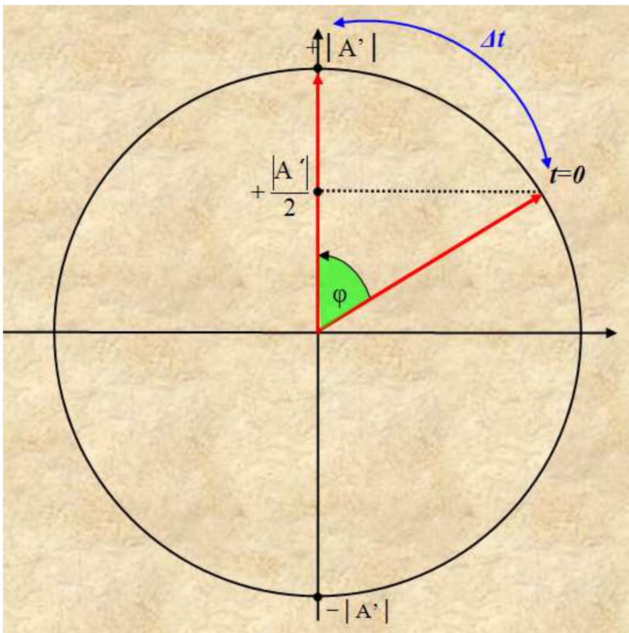
ενώ τη χρονική στιγμή t_1 μηδενίζεται για 1η φορά η κινητική τους ενέργεια μετά την t=0, δηλαδή βρίσκονται σε ακραία θέση ταλάντωσης.

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα του περιστρεφόμενου διανύσματος

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{|A'|/2}{|A'|} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}rad$$

Όμως:

$$\omega=\frac{\varphi}{\Delta t}=\frac{\pi}{3\cdot\Delta t}=\frac{\pi}{3\cdot 1/30} \Rightarrow \omega=10\pi\ rad/s$$



Άρα: $T=\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$ T=0,2s

Τα σημεία της χορδής ευθυγραμμίζονται με τον ημιάξονα Ox κάθε φορά που περνούν από τη θέση ισορροπία τους που συμβαίνει κάθε $\frac{T}{2}$=0,1s.

Συνεπώς η ζητούμενη συχνότητα είναι: $f=\frac{1}{0,1} \Rightarrow \boldsymbol{f=10Hz}$

ε) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι της μορφής

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}+\theta\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot t}{T}+\varphi\right)$$

Στο x=0 υπάρχει κοιλία οπότε $|A'|=2A$ που σημαίνει ότι:

$$\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot 0}{\lambda}+\theta\right)\right|=1 \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\theta|=1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\pm 1 \Rightarrow \theta=0 \text{ ή } \theta=\pi \text{ rad}$$

Την t=0 όμως η απομάκρυνση της 1ης από αριστερά κοιλίας είναι $y_\kappa=+\frac{|A_\kappa'|}{2}$, οπότε:

☛ Για x=0, $y_\kappa=+\frac{|A_\kappa'|}{2}$ και θ=0

$$A=2A\sigma\upsilon\nu 0\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}rad \text{ ή } \varphi=\frac{5\pi}{6}rad$$

Για x=0, $t_1=\frac{1}{30}s$ και $\varphi=\frac{\pi}{6}rad$: $y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(0)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot 1/30}{0,2}+\frac{\pi}{6}\right)=+2A\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{6}=+2A$

Για x=0, $t_1=\frac{1}{30}s$ και $\varphi=\frac{5\pi}{6}rad$: $y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(0)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot 1/30}{0,1}+\frac{5\pi}{6}\right)=+2A\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{6}=-2A$,

οπότε η τιμή $\varphi=\frac{5\pi}{6}rad$ απορρίπτεται.

☛ Για x=0, $y_\kappa=+\frac{|A_\kappa'|}{2}$ και θ=π radQ

$$A=2A\sigma\upsilon\nu\pi\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi=-\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{7\pi}{6}rad \text{ ή } \varphi=\frac{11\pi}{6}rad$$

Για x=0, $t_1=\frac{1}{30}s$ και $\varphi=\frac{11\pi}{6}rad$: $y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot 1/30}{0,2}+\frac{11\pi}{6}\right)=-2A\cdot\eta\mu\frac{13\pi}{6}=-2A$, οπότε η τιμή $\varphi=\frac{11\pi}{6}rad$ απορρίπτεται.

Για x=0, $t_1=\frac{1}{30}s$ και $\varphi=\frac{7\pi}{6}rad$: $y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot 1/30}{0,2}+\frac{7\pi}{6}\right)=-2A\cdot\eta\mu\frac{9\pi}{6}=+2A$

Άρα, οι δεκτές τιμές (θ,φ) είναι $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\left(\pi,\ \frac{7\pi}{6}\right)$, οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος μπορεί να γραφεί:

$$y=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot x}{0,4}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot t}{0,2}+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow \mathrm{y}=0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$$

ή

$$y=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot x}{0,4}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot t}{0,2}+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow \mathrm{y}=0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x+\pi)\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{7\pi}{6}\right)$$

Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις στάσιμου κύματος είναι απόλυτα ισοδύναμες δεδομένου ότι: συν(5πt+π)=−συν(5πt) και $\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{7\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$.

στ) Ένα σημείο που απέχει από το αριστερό άκρο της χορδής 0,25m, σχέση με την αρχή των αξόνων βρίσκεται στη θέση x_1=0,25-(λ/4)=0,15m, όπου (λ/4) είναι η απόσταση του αριστερού άκρου της χορδής από το άκρο Ο.
Η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x_1=0,15m είναι:

$$y_1=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi\cdot 0,15)\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y_1=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow y_1=-0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)=0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}+\pi\right)$$

Το άλλο σημείο που απέχει από το αριστερό άκρο της χορδής 0,85m, σχέση με την αρχή των αξόνων βρίσκεται στη θέση x_2=0,85-(λ/4)=0,75m.
Η εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου στη θέση x_2=0,75m είναι:

$$y_2=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi\cdot 0,75)\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y_2=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu(3,75\pi)\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow y_2=0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y_2=0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$$

Όπως φαίνεται η διαφορά φάσης των δύο σημείων είναι:

Δφ=π rad.

ζ) Την χρονική στιγμή $t_1=\frac{1}{12}s$ η κοιλία στη θέση x=0 έχει απομάκρυνση

$$y=0,4\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot\frac{1}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y=0,4\cdot\eta\mu\pi=0 \text{ και } u<0$$

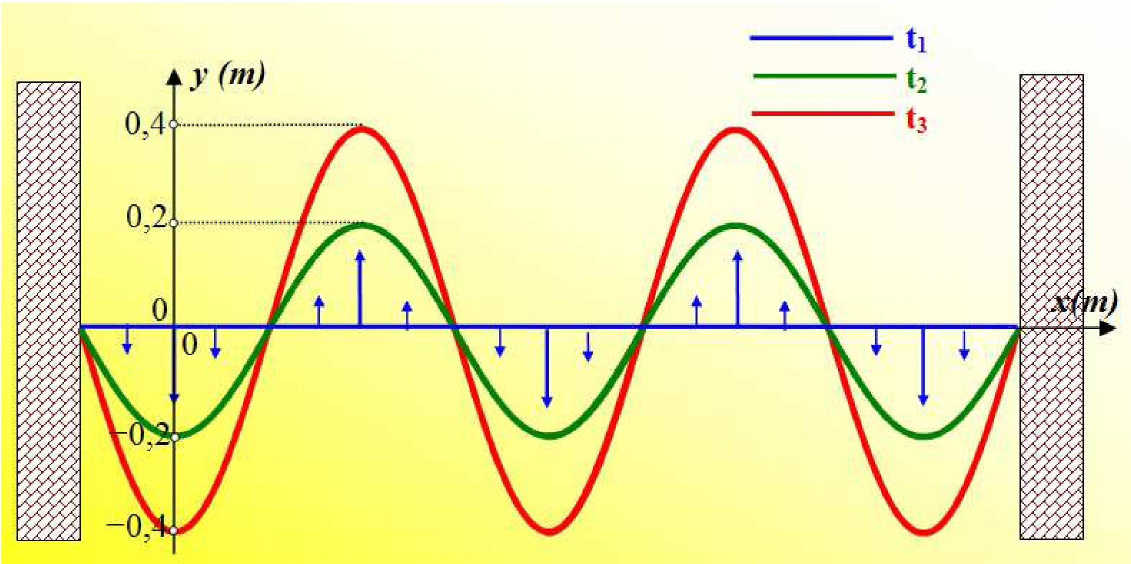
Την χρονική στιγμή $t_2=\frac{1}{10}s$ η κοιλία στη θέση x=0 έχει απομάκρυνση

$$y=0,4\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot\frac{1}{10}+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y=0,4\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{6}=-0,2m$$

Την χρονική στιγμή $t_3=\frac{2}{15}s$ η κοιλία στη θέση x=0 έχει απομάκρυνση

$$y=0{,}4\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot\frac{2}{15}+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow y=0{,}4\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}=-0{,}4m$$

Σχεδιάζουμε τα στιγμιότυπα λαμβάνοντας υπόψη, ότι όλα τα σημεία που ταλαντώνονται ταυτόχρονα διέρχονται από τη θέση ισορροπίας με τις διαδοχικές κοιλίες να έχουν αντίθετη φορά κίνησης, και ταυτόχρονα έρχονται σε ακραίες θέσεις ταλάντωσης με τις διαδοχικές κοιλίες να έχουν αντίθετες μέγιστες απομακρύνσεις.



η) Για το μήκος της χορδής θα ισχύει:

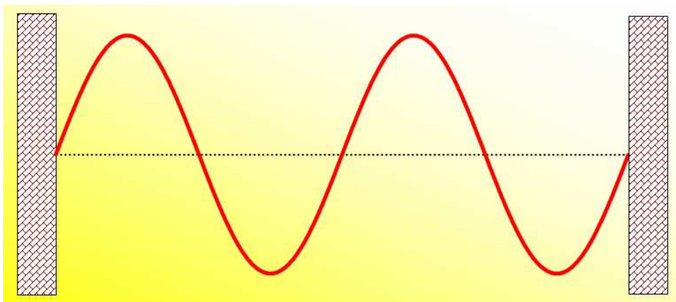
$$L=4\frac{\lambda'}{2}\Rightarrow L=4\frac{u_\delta}{2f'}\Rightarrow f'=\frac{2\lambda\cdot f}{L}=\frac{2\cdot 0{,}4\cdot 5}{1}$$

f’=4Hz

Οπότε:

$$\frac{\Delta f}{f}\cdot 100\%=\frac{f'-f}{f}\cdot 100\%=\frac{4-5}{5}\cdot 100\%$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta f}{f}\cdot 100\%=-20\%}$$



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια
Πέτρος Καραπέτρος