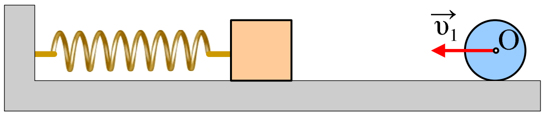
Ελαστική κρούση σφαίρας με ταλαντούμενο κύβο.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει μια σφαίρα ακτίνας R και μάζας 1kg με ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_1$=3m/s, κατευθυνόμενη προς έναν κύβο πλευράς α=2R και μάζας 2kg ο οποίος ταλαντώνεται με πλάτος 0,5m, στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=800N/m. Η ταχύτητα του κέντρου O της σφαίρας έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα.



Μετά την μετωπική ελαστική κρούση των δύο σωμάτων, η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα κέντρου μάζας μέτρου $υ_1΄$=9m/s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του κύβου πριν την κρούση.
ii) Κατά ποιο ποσοστό αυξήθηκε η κινητική ενέργεια της σφαίρας κατά την κρούση;
iii) Κατά ποιο κλάσμα μειώθηκε η ενέργεια ταλάντωσης του κύβου;
iv) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με το έδαφος, μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της I= 2/5 MR^2 και ότι κατά την κρούση μεταξύ σφαίρας και κύβου δεν αναπτύσσεται τριβή.

Απάντηση:

i) Κατά την διάρκεια της ελαστικής κρούσης των δύο σωμάτων οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, με μηδενική συνισταμένη, ενώ στον κύβο ασκείται και η δύναμη του ελατηρίου, όμως επειδή η κρούση διαρκεί απειροελάχιστα θεωρούμε ότι η ώθησή της είναι μηδενική, οπότε θεωρούμε το σύστημα μονωμένο. Έτσι για το σύστημα αυτό ισχύουν:

Α) Η Α.Δ.Ο. από όπου παίρνουμε (θεωρούμε την κατεύθυνση προς τα αριστερά θετική):

$$\vec{P}_{πρ} = \vec{P}_{μετ} \rightarrow m_1υ_1+m_2υ_2 = m_1υ_1΄+ m_2υ_2΄ \quad (1)$$

Β) Η Α.Δ.Σ. ως προς τον άξονα περιστροφής της σφαίρας (θετική φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού):

$$\vec{L}_{πρ} = \vec{L}_{μετ} \rightarrow I\cdot ω = I\cdot ω΄ \rightarrow ω=ω΄$$

Γ) Η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή:

$$½\, m_1υ_1^2 + \cancel{½\, Iω^2} + ½\, m_2υ_2^2 = ½\, m_1υ_1^{΄2} + \cancel{½\, Iω^{΄2}} + ½\, m_2υ_2^{΄2} \rightarrow$$
$$½\, m_1υ_1^2 + ½\, m_2υ_2^2 = ½\, m_1υ_1^{΄2} + ½\, m_2υ_2^{΄2} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) αποτελούν σύστημα η λύση του οποίου μας δίνει:

$$υ_1^{΄} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}υ_2 \quad (α)$$

$$υ_2^{΄} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}υ_2 \quad (β)$$

Με αντικατάσταση στη (α) παίρνουμε:

$$-9=\frac{1-2}{1+2}3+\frac{2\cdot 2}{1+2}\upsilon_2 \text{ (S.I)} \rightarrow \upsilon_2= -6m/s$$

δηλαδή ο κύβος πριν την κρούση κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου 6m/s.

ii) Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi=\frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}}100\%=\frac{\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2}+\frac{1}{2}I\omega^{'2}\right)-\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{\ 2}+\frac{1}{2}I\omega^2\right)}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{\ 2}+\frac{1}{2}I\omega^2}100\% \rightarrow$$

$$\Pi=\frac{m_1\left(\upsilon_1^{'2}-\upsilon_1^2\right)}{m_1\upsilon_1^2+\frac{2}{5}m_1R^2\frac{\upsilon_1^2}{R^2}}100\%=\frac{5\left(\upsilon_1^{'2}-\upsilon_1^2\right)}{7\upsilon_1^2}100\%\approx 571\%$$

iii) Από την (β) σχέση παίρνουμε:

$$\upsilon_2^{'}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2\rightarrow$$

$$\upsilon_2^{'}=\frac{2\cdot 1}{1+2}3m/s+\frac{2-1}{1+2}(-6)m/s=0$$

δηλαδή ο κύβος μετά την κρούση δεν έχει ταχύτητα.

Η ενέργεια της αρχικής ταλάντωσης του κύβου (πριν την κρούση) διατηρείται, οπότε αν τη στιγμή της κρούσης το σώμα Β απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας, έχουμε:

$$K+U=E_\tau \text{ ή}$$

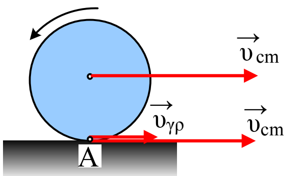
$$½\, m_2\cdot\upsilon_2^{\ 2} + ½\, kx^2 = ½\, k\cdot A^2 \rightarrow$$

$$x=\sqrt{A^2-\frac{m_2}{k}\upsilon_2^2}=\sqrt{0{,}5^2-\frac{2}{800}6^2}m=\sqrt{0{,}16}m=0{,}4m$$

Αφού όμως μετά την κρούση ο κύβος έχει μηδενική ταχύτητα, θα ξεκινήσει την νέα του ταλάντωση από ακραία θέση, η οποία απέχει κατά 0,4m από τη θέση ισορροπίας του, συνεπώς το νέο πλάτος είναι A_2=0,4m. Άρα η ενέργεια ταλάντωσης μειώθηκε και το κλάσμα μείωσης είναι:

$$\frac{\Delta E}{E_{\pi\rho}}=\frac{\frac{1}{2}kA_1^2-\frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2}=1-\frac{A_2^2}{A_1^2}=\frac{9}{25}$$

iv) Κατά την κρούση, δεν άλλαξε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας, η οποία εκτελεί σύνθετη κίνηση. Έτσι το σημείο επαφής της με το έδαφος Α, έχει μια ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, λόγω της μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, με φορά όπως στο σχήμα. Άρα το σημείο Α έχει ταχύτητα προς τα δεξιά με μέτρο:



$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega \cdot R = \upsilon_{cm} + \frac{\upsilon_1}{R} R = 9m/s + 3m/s = 12m/s$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης