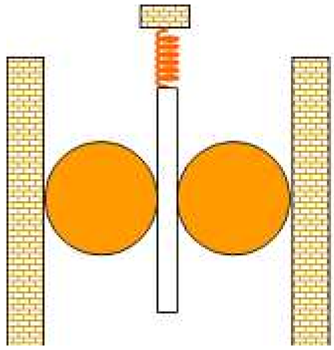
Δύο δίσκοι, μια ράβδος και ένα ελατήριο



Στην διάταξη στου σχήματος εικονίζονται μια ράβδος μάζας M, δύο δίσκοι ακτίνας R και μάζας m και ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k.

Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Ανυψώνουμε την ράβδο τόσο ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.

Η κίνηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι δίσκοι να μην ολισθαίνουν ούτε στην ράβδο ούτε στα πλευρικά τοιχώματα.

Α) Να αποδείξετε ότι στην θέση ισορροπίας η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στην ράβδο είναι ίση με το βάρος της ράβδου αυξημένο κατά το ημιάθροισμα των βαρών των δύο δίσκων.

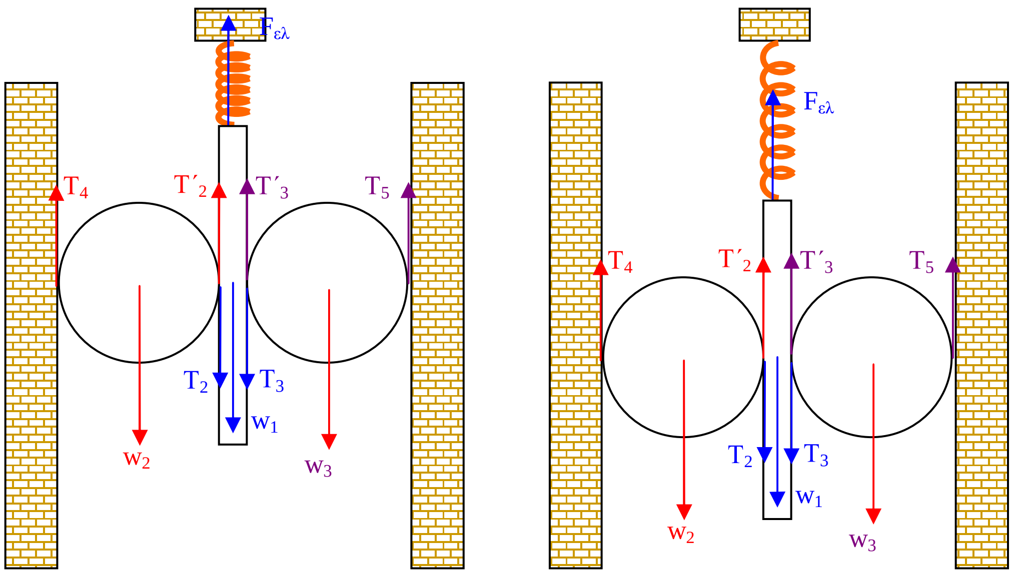
Β) Να αποδείξετε ότι οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες

Γ) Να αποδείξετε ότι η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας να βρείτε την περίοδο.

Δ) Να βρεθεί η ενέργεια που προσφέραμε για να ανεβάσουμε την ράβδο στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης

Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτού ομογενούς κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του διερχόμενο από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mR^2$

Απάντηση



Α)

Έστω ότι στην θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_1.

Στην θέση ισορροπίας στα σώματα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Στη ράβδο:

Το βάρος της w_1

Η δύναμη που της ασκεί το ελατηρίο $F_{ελ}$.

Η δύναμη τριβής T_2 που της ασκεί ο αριστερός δίσκος.

Η δύναμη τριβής T_3 που της ασκεί ο δεξιός δίσκος.

Στον αριστερό δίσκο:

Το βάρος του w_2

Η δύναμη τριβής $T΄_2$ που του ασκεί η ράβδος.

Η δύναμη τριβής T_4 που του ασκεί το αριστερό τοίχωμα.

Στον δεξιό δίσκο:

Το βάρος του w_3

Η δύναμη τριβής $T΄_3$ που του ασκεί η ράβδος.

Η δύναμη τριβής T_5 που του ασκεί το δεξιό τοίχωμα.

Από το αξίωμα δράσης - αντίδρασης ισχύει ότι $T_2' = T_2$ και $T_3' = T_3$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_1 + T_2 + T_3 - F_{ελ} = 0 \qquad (1)$$

Επειδή ο αριστερός δίσκος ισορροπεί ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_2 - T_2' - T_4 = 0 \qquad (2α)$$

$$\Sigma\tau(κέντρο) = 0 \Rightarrow T_2'R - T_4R = 0 \Rightarrow T_2 = T_4 \qquad (2β)$$

Από τις σχέσεις (2α) και (2β) προκύπτει ότι

$$T_2 = T_4 = \frac{w_2}{2} \qquad (3)$$

Ομοίως από τις συνθήκες ισορροπίας του δεξιού δίσκου

$$T_2 = T_4 = \frac{w_2}{2} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) έχουμε ότι:

$$w_1 + \frac{w_2}{2} + \frac{w_3}{2} - kx_1 = 0 \qquad (5)$$

Β) Έστω $υ_1$ η ταχύτητα της ράβδου και $υ_2$, $υ_3$ οι ταχύτητες των κέντρων του αριστερού και δεξιού δίσκου αντιστοίχως.

Θεωρούμε μια χρονική στιγμή που ράβδος κατεβαίνει.

Ο αριστερός δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $ω_2$ σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού και ο δεξιός με γωνιακή ταχύτητα $ω_3$ αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

Επειδή ο αριστερός δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο αριστερό τοίχωμα ισχύει η σχέση $υ_2=ω_2R$.

Επομένως η ταχύτητα του σημείου επαφής του αριστερού δίσκου με την ράβδο είναι $2υ_2=2ω_2R$.

Επειδή ο αριστερός δίσκος δεν ολισθαίνει στην ράβδο, θα πρέπει η ταχύτητα του σημείου επαφής με την ράβδο να ισούται με την ταχύτητα της ράβδου. Επομένως

$$\upsilon_1 = 2\upsilon_2 = 2\omega_2 R \qquad (6)$$

Σκεπτόμενοι ομοίως για τον δεξιό κύλινδρο συμπεραίνουμε ότι:

$$\upsilon_1 = 2\upsilon_3 = 2\omega_3 R \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6), (7) προκύπτει ότι $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Από την σχέση αυτή παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε ότι $\alpha_{\gamma 1} = \alpha_{\gamma 2} = \alpha_{\gamma}$.

Γ) Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει ότι

$$a_2 = a_3 = \frac{a_1}{2},\ \alpha_{\gamma 2} = \alpha_{\gamma 3} = \alpha_{\gamma} = \frac{a_2}{R} = \frac{a_3}{R} = \frac{a_1}{2R} \quad (8)$$

Θεωρούμε μια τυχαία χρονική στιγμή στην οποία η ράβδος έχει απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας της κατά x.

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του αριστερού δίσκου ισχύει ότι

$$\Sigma F = m a_2 \Rightarrow w_2 - T_4 - T_2' = m a_2 \qquad (9)$$

Για την στροφική κίνηση του αριστερού δίσκου έχουμε:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm}\alpha_{\gamma} \Rightarrow T_4 R - T_2' R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_2}{R} \Rightarrow T_4 - T_2' = \frac{1}{2} m a_2 \quad (10)$$

Προσθέτοντας τις (9) και (10) κατά μέλη έχουμε:

$$w_2 - 2T_2' = \frac{3}{2} m a_2 \Rightarrow w_2 - 2T_2 = \frac{3}{4} m a_1 \qquad (11)$$

Εργαζόμενοι ομοίως με τον δεξιό δίσκο έχουμε ότι:

$$w_3 - 2T_3 = \frac{3}{4} m a_1 \qquad (12)$$

Για την κίνηση της ράβδου ισχύει ότι

$$\Sigma F = M a_1 \Rightarrow w_1 + T_2 + T_3 - F_{\varepsilon\lambda} = M a_1 \quad (13)$$

Διπλασιάζουμε την (13) και προσθέτουμε τις (12) και (13):

$$2w_1 + w_2 + w_3 - 2k(x_1 + x) = 2Ma_1 + \frac{3}{2} m a_1 \quad (14)$$

Από την συνθήκη ισορροπίας (5) ισχύει ότι: $2w_1 + w_2 + w_3 - 2kx_1 = 0$

Επομένως η σχέση (14) γίνεται:

$$-2kx = 2Ma_1 + \frac{3}{2} m a_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{k}{M + \frac{3}{4}m} x \qquad (15)$$

Από την σχέση (15) συμπεραίνουμε ότι η ράβδος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{3}{4}m}} \qquad (16\alpha)$$

και περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{3}{4}m}{k}} \qquad (16β)$$

Δ) Στην ΘΙ η δυναμική ενέργεια του συστήματος ήταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

$$U_{ΘΙ} = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Όταν η ράβδος ανέβει κατά x_1 η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών σωμάτων είναι:

$$U_{ακραία} = Mgx_1 + mg\frac{x_1}{2} + mg\frac{x_1}{2} = (M+m)gx_1 = kx_1^2$$

Επομένως η προσφερθείσα ενέργεια είναι:

$$E_{προσφ} = kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\frac{(M+m)^2g^2}{k}$$

Παρατήρηση

Έστω $x=y_1$, y_2, y_3 οι απομακρύνσεις των σωμάτων ράβδος, αριστερός δίσκος από τις θέσεις ισορροπίας τους.

Ισχύει ότι $y_2 = y_3 = \frac{x}{2}$.

Για τις δυναμικές ενέργειες των τεσσάρων σωμάτων και την δυναμική ενέργεια του συστήματος ισχύει ότι:

$$U_1 = -Mgx\,,\; U_2 = -mgy_2 = -mg\frac{x}{2}\,,\; U_3 = -mgy_3 = -mg\frac{x}{2}\,,\; U_{ελ} = \frac{1}{2}k(x_1+x)^2$$

$$U = U_{ελ} + U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}k(x_1+x)^2 - Mgx - mgx \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_1+x)^2 - Mgx - mgx = \frac{1}{2}kx^2 - (Mg + mg - kx_1)x + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Επειδή η θέση x=0 είναι θέση ισορροπίας θα πρέπει η θέση αυτή να είναι ελάχιστο του παραπάνω τριωνύμου. Άρα

$$0 = \frac{-β}{2α} \Rightarrow β = 0 \Rightarrow Mg + mg - kx_1 = 0$$

Συνεπώς (παραλείποντας έναν σταθερό όρο) $U = \frac{1}{2}kx^2$

Με τον τρόπο αυτό ανακτήσαμε την σχέση (5)

Η κινητικές ενέργειας των τριών σωμάτων είναι

$$K_1 = \frac{1}{2}Mυ_1^2\;,\; K_3 = K_2 = \frac{1}{2}mυ_2^2 + \frac{1}{2}Iω_2^2 = \frac{1}{2}mυ_2^2 + \frac{1}{4}mυ_2^2 = \frac{3}{4}mυ_2^2 = \frac{3}{16}mυ_1^2$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2}Mυ_1^2 + \frac{3}{8}mυ_1^2 = \frac{1}{2}(M + \frac{3}{4}m)υ_1^2$$

Συνεπώς η ολική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(M + \frac{3}{4}m)\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (17)$$

Επειδή $\upsilon_1 = \frac{dx}{dt}$, η σχέση (17) είναι ισοδύναμη με την ενέργεια ενός σώματος μάζας $M + \frac{3}{4}m$ δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k. Άρα η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\Omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{3}{4}m}}$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Ισχύει ότι $U_{ΘΙ}=0$ και $U_{μεγ} = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\frac{(M+m)^2 g^2}{k}$

Άρα η προσφερθείσα ενέργεια είναι:

$$E_{προσφ} = U_{μεγ} = \frac{1}{2}\frac{(M+m)^2 g^2}{k}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης