Δύο τρέχοντα κύματα και η συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται δύο εγκάρσια κύματα με αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα φτάνουν τη στιγμή t=0, σε ένα σημείο του μέσου Σ, στη θέση $x_Σ$=4m. Το σημείο αυτό εξαιτίας κάθε κύματος ξεκινά να ταλαντώνεται με εξίσωση y=0,2·ημπt (S.I.). Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι υ=2m/s, ζητούνται:

i) Η περίοδος και το μήκος κύματος κάθε κύματος.

ii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

iv) Πόσοι δεσμοί έχουν σχηματιστεί πάνω στο μέσο τη χρονική στιγμή t_1=1,5s;

v) Να σχεδιάστε τη μορφή του μέσου την στιγμή t_1.

vi) Δύο υλικά σημεία Μ και Ν βρίσκονται δεξιά και αριστερά της θέσης x=7m και έχουν ίσες απομακρύνσεις, από τη θέση ισορροπίας τους. Το σημείο Μ είναι το πλησιέστερο στη θέση x=7m σημείο με την παραπάνω ιδιότητα. Ποιο υλικό σημείο τη στιγμή t_1 έχει:

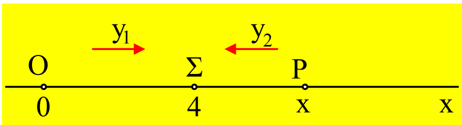
α) Μεγαλύτερη ταχύτητα ταλάντωσης.

β) Μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης.

Απάντηση:

i) Από την εξίσωση y=0,2·ημπt προκύπτει ότι ω=π ή Τ=$\frac{2\pi}{\pi}s = 2s$, αλλά τότε λ=υΤ=4m.

ii) Έστω ένα τυχαίο σημείο Ρ στη θέση x, όπως στο σχήμα. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του Ρ εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, θα έχει τη ίδια μορφή με την αντίστοιχη εξίσωση του Σ, με μόνη διαφορά ότι θα καθυστερήσει να ταλαντώνεται κατά $t_1 = \frac{d}{\upsilon} = \frac{x-4}{2}$. Έτσι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά θα είναι:



$$y_1 = 0{,}2\cdot \eta\mu\pi(t-t_1) = 0{,}2\cdot\eta\mu\pi\left(t-\frac{x-4}{2}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}+1\right) \text{ (S.I.) (1)}$$

Η μόνη διαφορά για το κύμα που διαδίδεται προς τ' αριστερά, όσον αφορά την ταλάντωση του σημείου Ρ, είναι ότι έχει αρχίσει να ταλαντώνεται πριν το Σ, κατά $t_1 = \frac{d}{\upsilon} = \frac{x-4}{2}$, οπότε η εξίσωση για το κύμα προς τ' αριστερά θα είναι:

$$y_2 = 0{,}2\cdot \eta\mu\pi(t+t_1) = 0{,}2\cdot\eta\mu\pi\left(t+\frac{x-4}{2}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{4}-1\right) \text{ (S.I.) (2)}$$

iii) Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας για την συμβολή των δυο κυμάτων βρίσκουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}2\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}+1\right)+\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{4}-1\right)\right]\rightarrow$$

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\frac{t}{2}\rightarrow\quad y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\frac{x}{2}\cdot\eta\mu\pi t\ \ \text{(S.I.)}\ \ (3)$$

iv) Μέχρι τη στιγμή t_1 κάθε κύμα έχει διατρέξει απόσταση $s=\upsilon\cdot t_1=3m$, συνεπώς έχει σχηματισθεί στάσιμο στην περιοχή $x_\Sigma - s \le x \le x_\Sigma + s$ ή $1m \le x \le 7m$.

Δεσμοί υπάρχουν στις θέσεις όπου $\left|0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\right|=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}=0\rightarrow\frac{\pi x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ή x=2k+1

Αλλά τότε: $1\le 2k+1 \le 7 \rightarrow 0 \le k \le 3$. Άρα k= 0 , 1, 2, 3, συνεπώς έχουν σχηματισθεί 4 δεσμοί.

v) Πάνω στο ελαστικό μέσον έχουν οριστεί, με βάση τα παραπάνω τρεις περιοχές:

Α) x<1m. Στην περιοχή αυτή διαδίδεται μόνο το κύμα προς τα δεξιά, συνεπώς από την (1) για t=1,5s έχουμε:

$$y_1=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{4}+1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{1{,}5}{2}-\frac{x}{2}+1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu(3{,}5\pi-\pi x)=-0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x$$

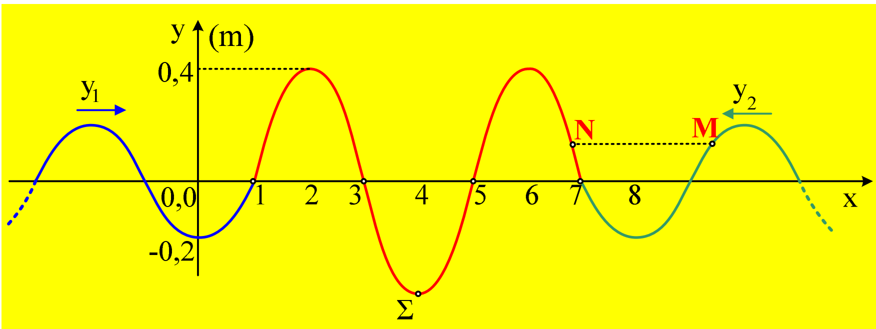
Β) Για την περιοχή $1m \le x \le 7m$ έχουμε με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$y=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\frac{x}{2}\cdot\eta\mu\pi t=0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu\frac{3\pi}{2}=-0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}$$

Γ) Για x>7m, αντικαθιστώντας t=1,5s στην εξίσωση (2) θα έχουμε:

$$y_2=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{4}-1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{1{,}5}{2}+\frac{x}{2}-1\right)=0{,}2\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}+\pi x\right)=-0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x$$

Με βάση τα παραπάνω ευρήματα η μορφή του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



vi) Στο παραπάνω στιγμιότυπο έχουν σημειωθεί δύο τέτοια σημεία Μ και Ν.

α) Η ταχύτητα του υλικού σημείου Ν είναι μηδενική. Όλα τα σημεία μεταξύ 1m και 7m, τη στιγμή t=1,5s βρίσκονται στην ακραία θέση της ταλάντωσής τους. Αντίθετα το σημείο Μ έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω.

β) Αν y_1 η απομάκρυνση των δύο υλικών σημείων τη στιγμή αυτή, τότε:

$$E_N= ½\, DA^2= ½\, m\omega^2\cdot y_1^2 \ \text{ ενώ}$$

$$E_M= ½\, Dy_1^2+ ½\, m\upsilon_M^2 = ½\, m\omega^2\cdot y_1^2 + ½\, m\upsilon_M^2 = E_N + ½\, m\upsilon_M^2$$

Συνεπώς το Μ έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης.

Σχόλιο:

Αν το υλικό σημείο Μ βρίσκεται σε θέση πλάτους, τότε προφανώς θα είχε μηδενική ταχύτητα και ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_M = ½\, DA^2 = ½\, m\omega^2 \cdot A^2$$

Θα είχε δηλαδή τότε και την ίδια ενέργεια με το σημείο Ν.

Επιμέλεια
Διονύσης Μάργαρης