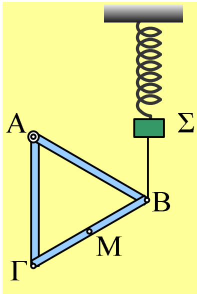
Ακροβατώντας μεταξύ ενιαίου στερεού και ράβδων.



Διαθέτουμε τρεις όμοιες ομογενείς ράβδους μάζας m=3kg και μήκους ℓ=4/3m η καθεμιά. Τις ενώνουμε στα άκρα, σχηματίζοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (στερεό S). Το στερεό S, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από την κορυφή Α, ισορροπεί δε σε θέση όπου η πλευρά ΑΓ είναι κατακόρυφη, δεμένο με κατακόρυφο νήμα στην κορυφή Β. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο στο υλικό σημείο Σ, το οποίο ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, όπως στο σχήμα.

i) Να βρεθεί η τάση του νήματος μεταξύ της κορυφής Β και σώματος Σ.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα.

ii) Να υπολογίστε τη ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς τον άξονα περιστροφής του.

iii) Να υπολογίστε τις αρχικές επιταχύνσεις της κορυφής Β και του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ. Να σχεδιάστε στο σχήμα τις παραπάνω επιταχύνσεις.

iv) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής των ράβδων ΑΓ και ΒΓ, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.

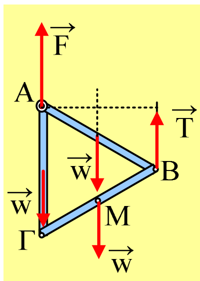
v) Να βρεθεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του στερεού S.

vi) Να υπολογιστεί η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος Σ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=\frac{1}{12}m\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Θα μπορούσαμε να βρούμε το βάρος του στερεού S (το οποίο ασκείται στο βαρύκεντρο του τριγώνου) και να δουλέψουμε κατά βάση με τη στροφική κίνηση του S. Εδώ θα δουλέψουμε εν μέρει με το στερεό S, αλλά θα αναφερόμαστε συνήθως και στις επιμέρους ράβδους.



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στις τρεις ράβδους (όχι τις δυνάμεις που ασκεί η μια ράβδος στην άλλη). Αφού το στερεό S ισορροπεί ΣF=0 και $\Sigma\tau_A=0$ →

$$T\cdot\ell\cdot\eta\mu 60^o - mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o - mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o + mg\cdot 0 + F\cdot 0 = 0 \ \rightarrow$$

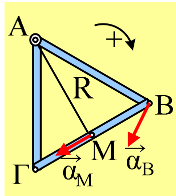
$$T = mg = 30N$$

ii) Η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα που περνά από την κορυφή Α είναι:

$$I_s = I_{AB} + I_{B\Gamma} + I_{\Gamma A} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m(AM)^2\right) + \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) \rightarrow$$

$$I_s = 2\cdot\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}m\ell^2 \rightarrow I_s = 8kg\cdot m^2.$$

iii) Μόλις κόψουμε το νήμα, το στερεό στρέφεται γύρω από τον άξονα στο Α, με φορά ίδια με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και με εφαρμογή του 2[ου] νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I_A\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o + mg\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 60^o = \frac{3}{2}m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g\cdot\eta\mu 60^o}{3\ell} = \frac{2\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\cdot\frac{4}{3}} rad/s^2 = 2{,}5\sqrt{3} rad/s^2$$

Αλλά τότε το σημείο Β έχει επιτάχυνση (κάθετη στην ακτίνα ΑΒ) μέτρου $\alpha_B = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$

και το Μ: $a_M = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, όπου R το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου, μήκους:

$$R = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}m, \text{ οπότε } a_M = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R = 2{,}5\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}m/s^2 = 5m/s^2$$

κάθετη στην ακτίνα R, όπως στο σχήμα.

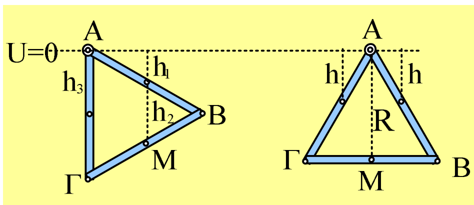
iv) Για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

$$\frac{dL_{A\Gamma}}{dt} = \Sigma\tau = I_{A\Gamma}\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}3\cdot\frac{16}{9}\cdot 2{,}5\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2 = \frac{40}{9}\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2$$

$$\frac{dL_{B\Gamma}}{dt} = \Sigma\tau = I_{B\Gamma}\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + mR^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{B\Gamma}}{dt} = \frac{5}{6}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5}{6}3\cdot\frac{16}{9}\cdot 2{,}5\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2 = \frac{100}{9}\sqrt{3}kg\cdot m^2/s^2$$

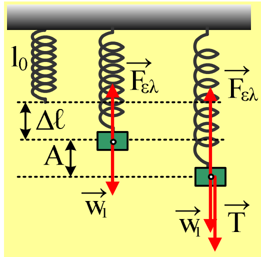
v) Το στερεό S επιταχύνεται στροφικά μέχρι η πλευρά ΒΓ να γίνει οριζόντια, όπου Στ=0, ενώ στη συνέχεια η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει αντίθετη φορά και το στερεό θα επιβραδύνεται. Κατά συνέπεια η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι στην θέση όπου Στ=0. Αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος (συντηρητική δύναμη) η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:



$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 0 - mgh_1 - mgh_2 - mgh_3 = -2mgh - mgR + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$$

$$K_{max} = 2mg\frac{\ell}{2}\eta\mu 60^o + mg\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o - mg\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu 60^o\right) - mg\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$K_{max} = \frac{1}{2}mg\ell(2\sqrt{3} - 3) = \frac{2}{2}3\cdot 10\cdot\frac{4}{3}\left(2\sqrt{3} - 3\right)J \approx 9{,}3J$$



vi) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φυσικό μήκος του ελατηρίου, η θέση ισορροπίας και η αρχική θέση τη στιγμή που συνδέεται με το στερεό.

Πριν να κοπεί το νήμα, το σώμα ισορροπεί:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-w_1-T=0 \rightarrow k(\Delta\ell+A)=mg+T \quad (α)$$

Αν πάρουμε το σώμα στη Θ.Ι. της ταλάντωσής του:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-w_1=0 \rightarrow k\Delta\ell=mg \quad (β)$$

Από (α) και (β) kA=T $\rightarrow$ $A=\dfrac{T}{k}=\dfrac{30}{100}m=0{,}3m$

Συνεπώς η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K_{max}=U_{max}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}100\cdot 0{,}3^2\,J=4{,}5J$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης