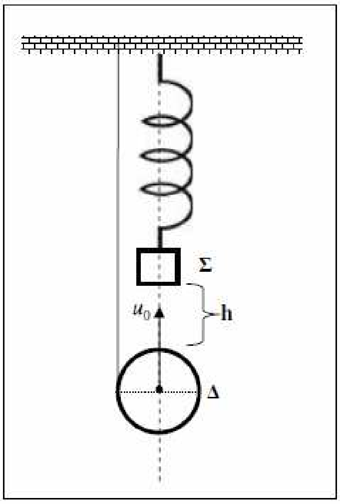
Ένα γιο-γιο και μια ταλάντωση



Μικρό σώμα (Σ) μάζας m=1kg ηρεμεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=100N/m το άνω άκρο του οποίου είναι δέσμιο. Γιογιό αποτελείται από κυκλική λεπτή ομογενή άκαμπτη στεφάνη (Δ), μάζας M=3kg, τυλιγμένη με αβαρές μη εκτατό νήμα.Το ελεύθερο άκρο του νήματος είναι δεμένο. Προσδίδουμε στη στεφάνη (Δ) κατακόρυφη μεταφορική ταχύτητα u_0 και αυτή ανέρχεται περιστρεφόμενη περί του κέντρου της καθώς το νήμα τυλίγεται χωρίς ολίσθηση παραμένοντας κατακόρυφο. Το κέντρο της κινείται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Όλες οι κινήσεις γίνονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Αντίσταση αέρα δεν υπάρχει. Δίνεται $g=10m/s^2$.

i) Η στεφάνη (Δ) έχει μηδενική ταχύτητα τη στιγμή που φτάνει στο σώμα (Σ). Αν η διάρκεια της ανοδικής κίνησής της είναι Δt=2s να υπολογίσετε την αρχική κατακόρυφη απόσταση h μεταξύ στεφάνης (Δ) και σώματος (Σ).

ii) Να υπολογίσετε την ακτίνα R της στεφάνης (Δ) αν το μέτρο της στροφορμής είναι $L_1=15Kgm^2$ όταν η κινητική της ενέργεια είναι $K_1 75J$.

iii) Η στεφάνη (Δ) προσκολλάται στο σώμα (Σ) και την ίδια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης ταλάντωσης θεωρώντας $t_0=0$ τη στιγμή επαφής. Θεωρήστε τον ημιάξονα Oy προσανατολισμένο κατακόρυφα προς τα επάνω και το συσσωμάτωμα σημειακό αντικείμενο.

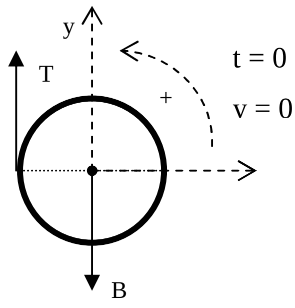
Απάντηση:

i)

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στη μεταφορική κίνηση έχουμε

$$\Sigma F_y = Ma$$

$$-Mg + T = Ma$$



ενώ στη στροφική κίνηση έχουμε

$$\Sigma \tau_{CM} = \mathrm{I}\ a_{\Gamma\Omega N}$$

$$-TR = MR^2 \cdot \frac{a}{R}$$

$$-T = Ma$$

Από τις δυο τελευταίες με πρόσθεση κατά μέλη

$$-Mg = 2Ma$$

$$a = -g/2$$

Όποτε με αντικατάσταση

$$0 = u_0 + at_s$$

$$u_0 = 10m/s$$

$a = -5\ m/s^2$

Για τη μεταφορική ταχύτητα έχουμε

$u = u_0 + at$

Στο σημείο επαφής (ανώτατο σημείο)

$u_s = 0, t_s = 2s$

ii)

Η κινητική ενέργεια είναι

$K = K_{MET} + K_{\Pi E P}$

$K = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2$

$K = \frac{1}{2}M(\omega R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$

$K = MR^2\omega^2$ (1)

Η στροφορμή είναι

$L = \mathrm{I}\omega$

$L = MR^2\omega$ (2)

iii)

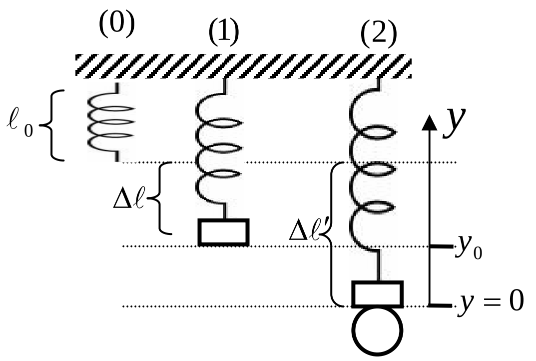
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται

(0) Φυσικό μήκος ελατηρίου

(1) Θέση ισορροπίας (Σ)

Αρχική θέση ταλάντωσης

(2) Θέση ισορροπίας ταλάντωσης



Για ταλάντωση μικρής μάζας σε ιδανικό ελατήριο η σταθερά επαναφοράς είναι

$D = K$

Η εξίσωση θέση του κέντρου μάζας είναι

$y = u_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$y = 10t - \frac{5}{2}t^2 \quad (S.I)$

$h = 10t_s - \frac{5}{2}t_s^{\,2} \quad (S.I)$

$\boxed{h = 10m}$

Διαιρούμε κατά μέλη

$\frac{K}{L} = \omega$

$\omega = 5\ rad/s$

Από τη (2) έχουμε

$R = \sqrt{\frac{L}{M\omega}}$

$\boxed{R = 1m}$

Για τη θέση ισορροπίας ταλάντωσης έ-χουμε

$\Sigma F = 0$

$K\Delta\ell' = (m+M)g$

$\Delta\ell' = \frac{(m+M)g}{K}$

$D = 100 N/m$

και γωνιακή συχνότητα είναι

$\omega = \sqrt{\dfrac{D}{M+m}}$

$\omega = 5 rad/s$

Για τη θέση ισορροπίας (Σ) έχουμε

$\Sigma F = 0$

$K\Delta\ell = mg$

$\Delta\ell = \dfrac{mg}{K}$

$\Delta\ell = 0{,}1m$

$\Delta\ell' = 0{,}4m$

Οι αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης είναι

$y_0 = \Delta\ell' - \Delta\ell = 0{,}3m$

$u_0 = 0$

Άρα

$A = y_0 = 0{,}3m$

$\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} rad$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$\boxed{y = 0{,}3\eta\mu(5t + \frac{\pi}{2}) \quad (S.I)}$

Επιμέλεια

Μυσίρης Κώστας