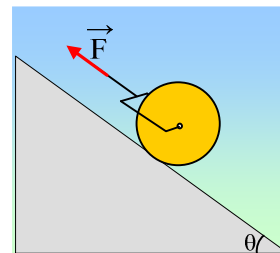


Δύναμη και είδος κίνησης.

Ο άξονας ενός ομογενούς κυλίνδρου συνδέεται με αβαρές νήμα, μέσω του οποίου μπορούμε να ασκούμε πάνω του δύναμη F , όπως στο σχήμα. Αφήνουμε τον κύλινδρο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=1/8$ και ταυτόχρονα ασκούμε πάνω του δύναμη F παράλληλη στο επίπεδο. Αν η μάζα του κυλίνδρου είναι $M=10\text{kg}$, $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\eta\nu\theta=0,8$, η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I= \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$, ζητούνται:

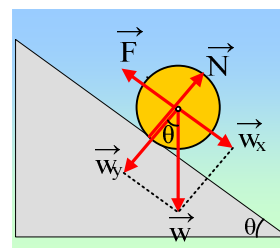


- i) Ποιο το μέτρο της F , ώστε ο κύλινδρος να παραμείνει ακίνητος;
- ii) Για ποιες τιμές της δύναμης F , ο κύλινδρος ανέρχεται κατά μήκος του επιπέδου, χωρίς να ολισθαίνει;
- iii) Για ποιες τιμές της δύναμης F , ο κύλινδρος κατέρχεται κατά μήκος του επιπέδου, χωρίς να ολισθαίνει;
- iv) Ποιος ο ελάχιστος χρόνος για να διανύσει ο κύλινδρος απόσταση 4m :

α) κυλιόμενος προς τα πάνω β) κυλιόμενος προς τα κάτω.

Απάντηση:

- i) Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί $\Sigma F=0$ και $\Sigma \tau=0$, αλλά το βάρος, η κάθετη αντίδραση του επιπέδου και η ασκούμενη δύναμη F περνάνε από το κέντρο μάζας, ως προς το οποίο δεν έχουν ροπή, στον κύλινδρο δεν ασκείται τριβή (αν ασκείτο θα είχε ροπή ως προς το κέντρο μάζας, οπότε θα είχαμε $\Sigma \tau \neq 0$). Αλλά τότε $\Sigma F_x=0$ ή



$$F=w_x=Mg\cdot\eta\mu\theta = 10\cdot 10\cdot 0,6\text{N}=60\text{N}.$$

- ii) Αφού ο κύλινδρος κυλιέται προς τα πάνω, θα πρέπει να στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, συνεπώς η τριβή έχει φορά προς τα κάτω, αφού τότε έχει αριστερόστροφη ροπή.

Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma F_x=M\alpha_{\text{cm}} \rightarrow F-Mg\eta\mu\theta-T= M\alpha_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την στροφική εξάλλου κίνηση:

$$\Sigma \tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R= \frac{1}{2} MR^2 \rightarrow T= \frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά αφού ο κύλινδρος κυλιέται $\alpha_{\text{cm}}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T= \frac{1}{2} M\cdot\alpha_{\text{cm}} \quad (2)$$

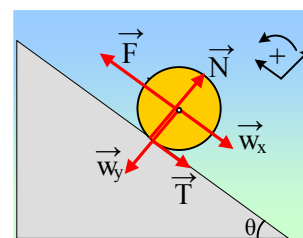
Με διαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{F - Mg\eta\mu\theta - T}{T} = 2 \rightarrow$$

$$F=Mg\eta\mu\theta+3T \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) μας δείχνει ότι μεγαλώνοντας η δύναμη F , αυξάνεται και η (στατική) τριβή. Αλλά η μεγαλύτερη τιμή της τριβής, είναι $T_{\text{op}}=\mu_s\cdot N= \mu_s Mg\cdot\sigma\eta\nu\theta=10\text{N}$, στην οποία αντιστοιχεί και η μέγιστη επιτρεπόμενη δύναμη:

$$F_{\text{max}}=Mg\eta\mu\theta+3T=(10\cdot 10\cdot 0,6+3\cdot 10)\text{N}=90\text{N}$$



Συνεπώς ο κύλινδρος κυλιέται ανερχόμενος κατά μήκος του επιπέδου για τιμές δύναμης:

$$60\text{N} < F \leq 90\text{N}$$

iii) Όταν ο κύλινδρος κατέρχεται κατά μήκος του επιπέδου $w_x > F$, οπότε η τριβή έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \rightarrow M g \mu \theta - F - T = M a_{cm} \quad (4)$$

Για την στροφική εξάλλου κίνηση:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} M R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά αφού ο κύλινδρος κυλιέται $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm} \quad (5)$$

Με διαίρεση των (4) και (5) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{M g \mu \theta - F - T}{T} = 2 \rightarrow$$

$$F = M g \mu \theta - 3T \quad (6)$$

Από την εξίσωση (6) συμπεραίνουμε ότι όσο μικρότερη είναι η δύναμη F , τόσο μεγαλύτερη είναι η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο, κατά συνέπεια η μικρότερη δυνατή τιμή της δύναμης αντιστοιχεί στην οριακή τριβή. Έτσι:

$$F_{\min} = M g \mu \theta - 3T = (10 \cdot 10 \cdot 0,6 - 3 \cdot 10) \text{N} = 30 \text{N}$$

Άρα οι επιτρεπόμενες τιμές της ασκούμενης δύναμης, ώστε ο κύλινδρος να κυλιέται κινούμενος προς τα κάτω είναι:

$$30 \leq F < 60 \text{N}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την κίνηση του κυλίνδρου για διάφορες τιμές της ασκούμενης δύναμης F .

Δύναμη (N)	30	60	90	
	ΚΑΘΟΔΟΣ		ΑΝΟΔΟΣ	
	Ολίσθηση	ΚΥΛΙΣΗ	ΚΥΛΙΣΗ	Ολίσθηση

iv) Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι η μέγιστη επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, είναι ίδια και κατά την άνοδο και κατά την κάθοδο, με μέτρο:

$$T_{op} = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm, \max} = \frac{2T_{op}}{M} = \frac{2 \cdot 10}{10} \text{m/s}^2 = 2 \text{m/s}^2$$

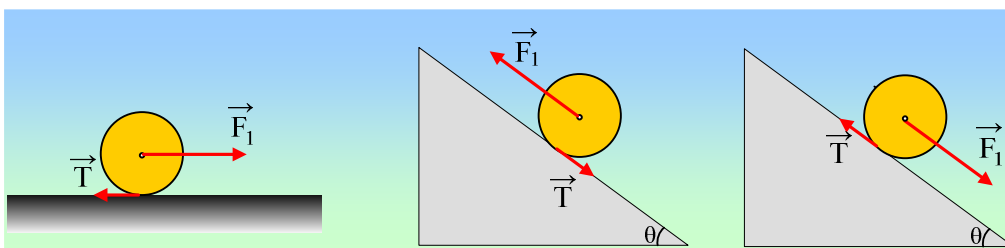
Ο ελάχιστος λοιπόν χρόνος για να διανυθεί απόσταση 4m είναι:

$$x = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2 \rightarrow t_{min} = \sqrt{\frac{2x}{a_{cm,max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{2}} s = 2s$$

Σχόλιο:

Κατά την **κύλιση** ενός τροχού-κυλίνδρου, με την επίδραση δύναμης, στον άξονά του, η μέγιστη δυνατή επιτάχυνση του άξονα, καθορίζεται από την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής $T_{op} = \frac{1}{2} M a_{cm,max}$. (Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε στερεό με κυκλική διατομή, αλλά με άλλον συντελεστή, λόγω διαφορετικής ροπής αδράνειας).

Έτσι με δεδομένη την τιμή της οριακής τριβής, άσχετα με το αν κυλιέται σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο υπάρχει μια επίσης δεδομένη μέγιστη επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Αυτή όμως η επιτάχυνση αποκτάται για μια μέγιστη επίσης δύναμη που ασκείται στο κέντρο μάζας, παράλληλη προς το επίπεδο κίνησης.



Έτσι αν ο κύλινδρος κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F_1 στον άξονά του, από τις εξισώσεις $F_1 = M \cdot a_{cm}$ και $T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{γων}$ προκύπτει $T = F_1/3$, από όπου βλέπουμε ότι υπάρχει μια μέγιστη δυνατή τιμή της δύναμης που μπορεί να ασκηθεί, $F_{1,max} = 3T_{op}$. Αν λοιπόν η τιμή της οριακής τριβής είναι π.χ. 10N, μπορούμε να ασκήσουμε οριζόντια δύναμη με μέτρο το πολύ 30N, χωρίς να ολισθήσει ο κύλινδρος.

Το ίδιο όμως συμβαίνει και στο κεκλιμένο επίπεδο, απλώς τώρα $F_1 = F - Mg \sin \theta$ ή $F_1 = Mg \sin \theta - F$, αν ανεβαίνει ή κατεβαίνει κατά μήκος του επιπέδου αντίστοιχα.

Οπότε η δύναμη που μπορούμε να ασκήσουμε για να έχουμε κύλιση, θα έχει:

Μέγιστη τιμή: $F = w_x + 30N = 60N + 30N = 90N$, για άνοδο ή

Ελάχιστη τιμή: $F = w_x - 30N = 60N - 30N = 30N$ κατά την κάθοδο.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης