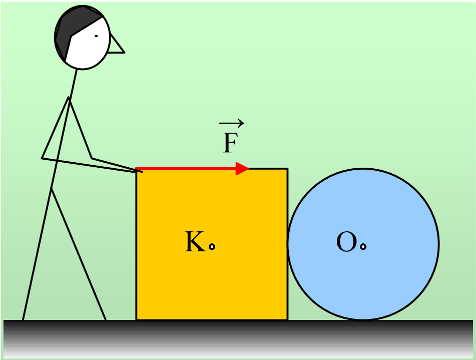
Ο Κύβος σπρώχνει έναν κύλινδρο.



Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν ένα κύβος ακμής α=1m και μάζας M=40kg και ένας κύλινδρος ακτίνας R=0,5m και μάζας m=30kg, σε επαφή. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ένας άνθρωπος ασκώντας σταθερή οριζόντια δύναμη F στην πάνω αριστερή κορυφή του κύβου, μετακινεί το σύστημα κατά 1,6m, μέχρι τη στιγμή $t_1=2s$, ενώ ο κύλινδρος κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει). Οι συντελεστές τριβής τόσο μεταξύ κύβου-κυλίνδρου, όσο και μεταξύ των σωμάτων και του εδάφους είναι $\mu=\mu_s=0,2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=½\,mR^2$ και $g=10m/s^2$.

i) Να υπολογιστεί η οριζόντια δύναμη με την οποία ο κύβος σπρώχνει τον κύλινδρο.

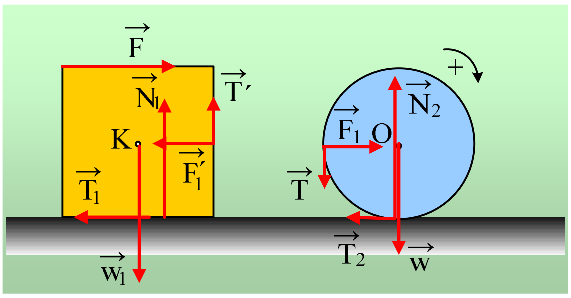
ii) Πόση θερμική ενέργεια παράγεται στο παραπάνω χρονικό διάστημα, λόγω τριβής, μεταξύ κύβου και κυλίνδρου;

iii) Να βρεθεί η ροπή της δύναμης που δέχεται ο κύβος από το έδαφος, ως προς το κέντρο μάζας Κ του κύβου.

iv) Αν τη στιγμή t_1 ο άνθρωπος παύει να σπρώχνει τον κύβο, να γίνει η γραφική παράσταση της απόστασης d=(ΚΟ) των κέντρων των δύο στερεών, μέχρι τη στιγμή $t_2=5s$.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε στερεό (διάγραμμα μεμονωμένου σώματος), όπου οι δυνάμεις $F_1΄$-F_1 και Τ-Τ΄ αποτελούν ζευγάρια δράσης αντίδρασης.



Αφού το παιδί ασκεί σταθερή δύναμη, όλες οι σημειωμένες δυνάμεις είναι σταθερές και το σύστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε $x=½\,at^2 \rightarrow a=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\cdot 1,6}{2^2}m/s^2=0,8m/s^2$.

i) Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ο 2ος νόμος μας δίνει $F_1-T_2=m\cdot\alpha$ (1) όπου T_2 η στατική τριβή που δέχεται από το έδαφος και F_1 η οριζόντια δύναμη που δέχεται από τον κύβο.

Εξάλλου για την περιστροφική του κίνηση $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_2\cdot R-T\cdot R=½\,mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και αφού κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $α=α_{cm}=α_{γων}\cdot R$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται : $T_2-T= ½ mα$ (2).

Η τριβή όμως Τ είναι τριβή ολίσθησης, αφού ο κύλινδρος στρέφεται οπότε τα σημεία επαφής του με τον κύβο έχουν ταχύτητα με φορά προς τα πάνω. Έτσι $T=μ\cdot F_1$ και με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$T_2-μF_1= ½ mα \quad (2^α)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και ($2^α$) παίρνουμε $F_1-μF_1= \frac{3}{2} mα \rightarrow$

$$F_1=\frac{3mα}{2(1-μ)}=\frac{3\cdot 30\cdot 0{,}8}{2(1-0{,}2)}N=45N$$

ii) Η θερμική ενέργεια που παράγεται μεταξύ των δύο στερεών είναι κατ' απόλυτο τιμή ίση με το έργο της τριβής ολίσθησης που αναπτύσσεται μεταξύ τους:

$$Q=|W_T| =τ\cdot θ=T\cdot R\cdot θ =μF_1\cdot (Rθ) = μF_1\cdot x =0{,}2\cdot 45\cdot 1{,}6J=14{,}4J.$$

Να σημειωθεί ότι αφού κυλίεται ο κύλινδρος, το μήκος του τόξου του κυλίνδρου που «τρίβεται» είναι ίσο με το μήκος του τόξου, που έρχεται σε επαφή με το έδαφος, ίσο επίσης και με την μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ας σημειωθεί επίσης ότι η τριβή είναι κατακόρυφη, συνεπώς δεν επηρεάζει την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου. Αυτό σημαίνει, ότι δεν παράγει έργο «σαν δύναμη», αλλά μόνο «σαν ροπή», επηρεάζοντας μόνο την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου και όχι την μεταφορική κινητική ενέργεια.

iii) Ο κυβος ισορροπεί στον άξονα y, οπότε $ΣF_y=0 \rightarrow N_1+T'-w=0 \rightarrow N_1=Mg-μF_1=400N-0{,}2\cdot 45N=391N$.

Αλλά τότε $T_1=μ\cdot N_1= 0{,}2\cdot 391N=78{,}2N$ και από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$ΣF_x=Mα \rightarrow F-F_1-T_1=Mα \rightarrow F=F_1+T_1+M α= 45N+78{,}2N+40\cdot 0{,}8N=155{,}2N$$

Αλλά αφού ο κύβος δεν στρέφεται (με θετικές τις δεξιόστροφες ροπές):

$$Στ_K=0 \rightarrow F\cdot α/2+F_1\cdot 0-T'\cdot α/2+τ_{(N1,T1)}=0 \rightarrow τ_{(N1,T1)}=-F\cdot α/2+T'\cdot α/2=-73{,}1Nm.$$

Όπου $τ_{(N1,T1)}$ η ροπή της δύναμης που ασκείται στον κύβο από το έδαφος, η ροπή της συνισταμένης της N_1 και της τριβής T_1.

iv) Μόλις σταματήσει ο άνθρωπος να σπρώχνει τον κύβο, μηδενίζεται και η δύναμη F_1 η οποία ασκείται μεταξύ των δύο σωμάτων. Γιατί; Αν υποθέσουμε ότι συνεχίζει να ασκείται κάποια δύναμη, αυτή θα επιτάχυνε τον κύλινδρο και θα επιβράδυνε τον κύβο, συνεπώς τα δυο σώματα δεν θα εκινούντο πια μαζί.

Αλλά τότε ο κύλινδρος θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}=α\cdot t_1 \rightarrow υ_{cm}=0{,}8\cdot 2m/s=1{,}6m/s$, αφού θα μηδενιστεί και η στατική τριβή T_2, έχοντας επίσης σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Η μετατόπιση του κυλίνδρου εξάλλου θα δίνεται από την εξίσωση $x_2=υ_{cm}(t-t_1)= 1{,}6t- 3{,}2$ (S.I)

Αντίθετα ο κύβος επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής:

$$ΣF_x=Mα_1\rightarrow -T_1=Mα_1\rightarrow Mα_1=-μN_1 \rightarrow α_1=-μg=-2m/s^2.$$

Αλλά τότε $υ=υ_{αρχ}+α(t-t_1)$, οπότε τη στιγμή που σταματά έχουμε: $0=1{,}6-2(t-2) \rightarrow 2t=1{,}6+4 \rightarrow t=2{,}8s$ ενώ θα έχει διανύσει απόσταση $x_1=υ_{αρχ}\cdot Δt+ ½ α_1Δt^2= 1{,}6\cdot 0{,}8m- ½ \cdot 2\cdot 0{,}8^2m=0{,}64m$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να χωρίσουμε την κίνηση σε τρία χρονικά διαστήματα:

A) Από 0 έως 2s: Η απόσταση των κέντρων των δύο στερεών είναι d=(KO)=1m.

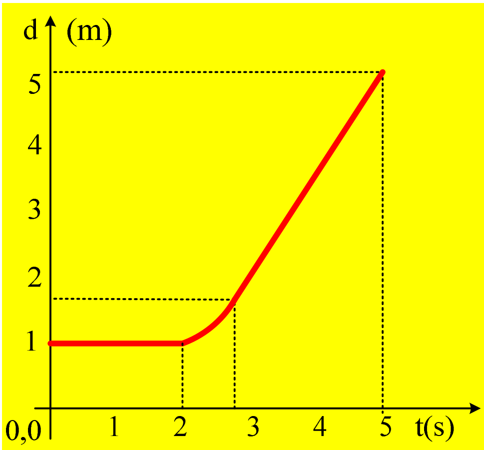
Β) Από 2s έως και 2,8s: $d=1m+x_2-x_1 = 1+1,6t-3,2 –[1,6(t-2)+ ½ (-2)\cdot(t-2)^2]= t^2-4t+5$ (S.I.)

Γ) Για $t\geq 2,8s$: $d =1+x_2-x_{1max}= 1+1,6t-3,2-0,64= 1,6t-2,84$ (μονάδες στο S.I.)

Έτσι η απόσταση d παίρνει τις τιμές του πίνακα:

t(s)	**d(m)**
0,0	1,00
2,0	1,00
2,8	1,64
5,0	5,16

Και η ζητούμενη λοιπόν γραφική παράσταση είναι:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης