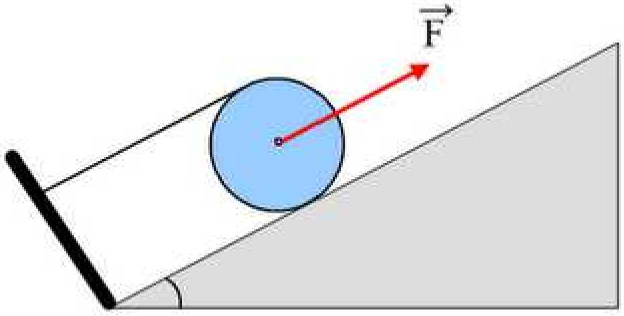
Μια περίεργη κύλιση

Κύλινδρος μάζας M=10Kg και ακτίνας R=0,5m αρχίζει την στιγμή t=0 να ανέρχεται κυλιόμενος (αριστερόστροφα) χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος αρχικά λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $φ=30^o$ με τη βοήθεια σταθερής δύναμης F=80N, που ασκείται στο κέντρο του κυλίνδρου και είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, και λεπτότατου σκοινιού που είναι τυλιγμένο στο κύλινδρο και είναι δεμένο στην αρχή του κεκλιμένου επιπέδου. Το νήμα ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή t_1=5s το νήμα κόβεται και η δύναμη F καταργείται. Εκείνη την στιγμή το επίπεδο γίνεται μη λείο με συντελεστή τριβής $μ=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο τη χρονική στιγμή t_1.
ii) Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου σε σχέση με την αρχική του θέση.
iii) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός επιστρέψει στην θέση όπου βρισκόταν την χρονική στιγμή t=0.

Δίνεται για τον κύλινδρο I_{cm}= ½ $M·R^2$.

Απάντηση:

i) Από τους νόμους κίνησης για την μεταφορική και στροφική κίνηση θα έχουμε

$$F\text{-}Mgημφ\text{-}T=M.a \ (1) \quad T.R= ½\, M·R^2·α_{γων} \quad άρα\ \ T= ½\, M·a\ (2)$$

Από την λύση των (1) και (2) θα βρούμε $a=2m/s^2$

Το διάστημα που θα έχει διανύσει ο κύλινδρος θα είναι s_1= ½ $a·t_1^2$=25m και η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι $υ_{cm}=a·t_1$=10m/s. Η ταχύτητα λόγω περιστροφής θα είναι επίσης $υ_{περ}$=10m/s γιατί ο κύλινδρος κύλιεται χωρίς να ολισθαίνει αριστερόστροφα βέβαια. Δηλαδή το σημείο που είναι δεμένο στο νήμα έχει ταχύτητα 0 και το σημείο που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα 2 $υ_{cm}$ =20m/s.Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητα του κυλίδρου θα είναι $\omega = \frac{\upsilon_{περ}}{R}$ =20r/s.

ii) Την στιγμή t_1 κόβεται το νήμα και παύει να ασκείται η δύναμη. Το σημείο επαφής όμως με το δάπεδο έχει συνολική ταχύτητα 20m/s με φορά προς τα πάνω. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή όλισθησης με φορά προς τα κάτω μέχρι να αρχίσει (αν αρχίσει) η καθαρή κύλιση. Έτσι ο κύλινδρος εκτελεί επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους και της τριβής ολίσθησης και επιβραδυνόμενη στροφική εξαιτίας της ροπής της τριβής ολίσθησης. Από τους νόμους της κίνησης θα έχουμε

$$M.g.ημφ+μ.M.gσυνφ=M·a_2 \qquad άρα\ a_2=10m/sec^2$$

και $\mu . M \cdot g \cdot συνφ \cdot R = ½ M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων}$ άρα $\alpha_{γων}=20 r/s^2$.

Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του κυλίνδρου η ταχύτητα του κέντρου μάζας του θα είναι 0.Ετσι από τον νόμο της ταχύτητας θα έχουμε $0=10-10t_2$ άρα $t_2=1s$.Την ίδια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου θα είναι $\omega΄=\omega-\alpha_{γων} \cdot t_2$ άρα $\omega΄=0 r/s$. Δηλαδή ταυτόχρονα με την μεταφορική σταματάει και η στροφική κίνηση του κυλίνδρου.

Το μήκος της διαδρομής που διανύει ο κύλινδρος μετά την κατάργηση της δύναμης θα βρεθεί από την σχέση του διαστήματος για την επιβραδυνόμενη κίνηση

$s_2=\upsilon_{cm}.t_2- ½ a_2 \cdot t_2^2=5m$. Άρα το συνολικό μήκος της διαδρομής θα είναι $s_{ολ}=25+5=30m$ άρα το

$$H_{max}=s_{ολ}/2=15m.$$

iii) Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος κυλίεται (δεξιόστροφα) προς τα κάτω θα ισχύουν οι νόμοι της κίνησης

$$M \cdot g \cdot ημφ - T_{στ}=M \cdot a_3 \quad (3) \quad T_{στ} \cdot R= ½ M \cdot R^2 \cdot \alpha_{γων2} \text{ άρα } T_{στ}= ½ M \cdot a_3 \ (4)$$

από τις εξισώσεις (3) και (4) θα βρούμε $a_3=10/3\ m/s^2$ και $T_{στ}=100/6$ N

Για να κυλιέται ο κύλινδρος θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κύλισης $T_{στ}<\mu.N$ δηλαδή $100/6<50$ που ισχύει άρα και ο κύλινδρος αρχίζει να κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει.

Μετά όμως από διαδρομή 5m θα μπει σε περιοχή όπου δεν υπάρχουν τριβές. Από εκεί και μετά θα πάψει να υπάρχει η στατική τριβή και θα εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους αλλά θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση αφού πλέον δεν θα υπάρχει καμία δύναμη που να προκαλεί ροπή.

Με την βοήθεια των εξισώσεων κίνησης για την μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$$s_2= ½ a_3 \cdot t_3^2 \text{ άρα } t_3=\sqrt{3}\ s \text{ και } \upsilon_{cm}=a_3 \cdot t_3=10\frac{\sqrt{3}}{3}\ m/s.$$

Μετά την είσοδο στο λείο επίπεδο με την βοήθεια της ΑΔΕ θα έχουμε

$$Mg \cdot \frac{s_1}{2}+\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm2}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

και μετά από πράξεις θα έχουμε

$$\upsilon_{cm2} \approx 16,8 m/s.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Χρήστος Ελευθερίου