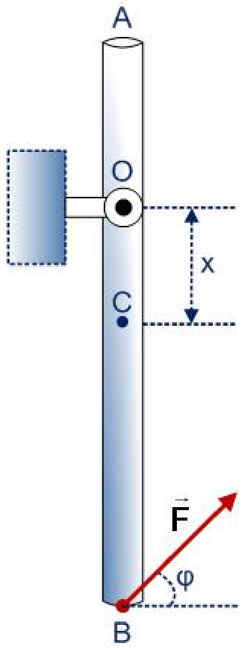
Μηδενισμός της Δύναμης του Άξονα Περιστροφής

Ομογενής ράβδος (ΑΒ) μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται ελευθέρα, χωρίς τριβή γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτή, ο οποίος διέρχεται από σημείο της **O** σε απόσταση x από το κέντρο μάζας της C. Η ράβδος αρχικά ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν την χρονικής στιγμή t=0, στο άκρο Β της ράβδου, εφαρμοστεί δύναμη F υπό γωνία φ = π/4, τέτοια ώστε να μηδενιστεί η δύναμη από την άξονα περιστροφής, **ακριβώς** στην αρχή της κίνηση (t=0), να υπολογιστούν:

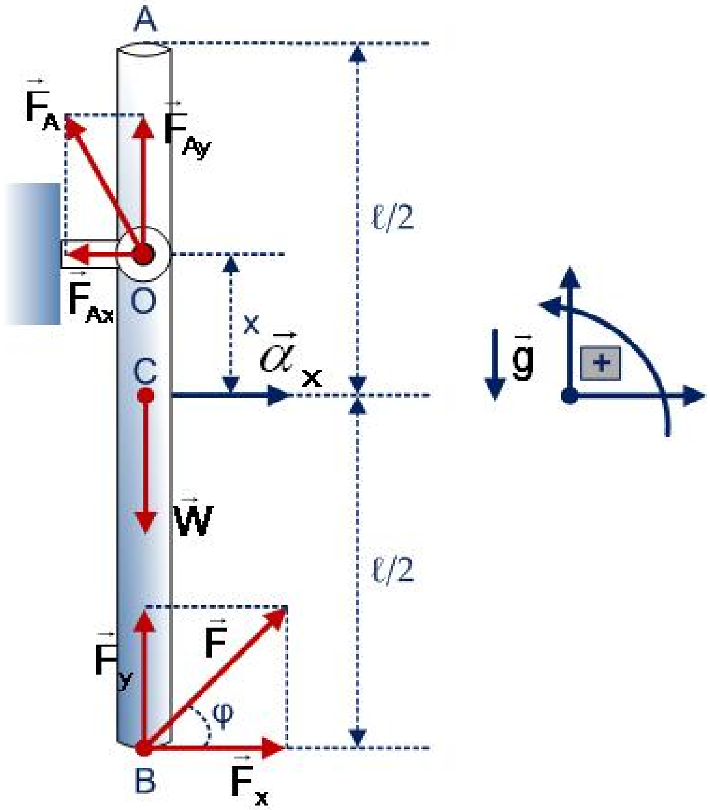
1) η δύναμη F

2) η απόσταση x

3) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη χρονική στιγμή t=0

Δίνεται: $I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$, g

Απάντηση:



- **Υπολογισμός ροπής αδράνειας**

η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και περνά από το **O**, θα είναι (θεώρημα Steiner):

$$\mathrm{I_O} = \mathrm{I_c} + \mathrm{mx^2} \xRightarrow{\mathrm{I_c}=\frac{1}{12}\mathrm{m}\ell^2} \mathbf{I_O} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}^{\mathbf{2}} + \mathbf{mx^2}\ (\mathbf{1})$$

- **Σχέση γωνιακής επιτάχυνσης και επιτάχυνσης κέντρου μάζας**

Κατά τη χρονική στιγμή (t=0) που ασκείται η δύναμη F και ενώ η ράβδος παραμένει ακόμη κατακόρυφη ($u_{cm}=0 \rightarrow \omega=0$), το κέντρο μάζας έχει **μόνο** επιτρόχια επιτάχυνση (**το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης α_y είναι ίσο με μηδέν**):

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\gamma\omega\nu}.} \cdot \mathbf{x}\ (\mathbf{2})$$

- **Ράβδος AB**

Γενικά οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι οι εξής: το βάρος της **W,** η δύναμη **F** στο σημείο B και η δύναμη $\mathbf{F_A}$ που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στο σημείο O, την οποία αν την αναλύσουμε σε συνιστώσες, η μια από αυτές θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, ενώ η άλλη θα είναι οριζόντια (δε μπορούμε να γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά της). Όμως από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι:

$$\mathbf{F_A} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F_{Ax}} = \mathbf{F_{A\boldsymbol{y}}} = \mathbf{0}\ (\mathbf{3})$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_X = m \cdot \alpha_x \Rightarrow F_X - F_{Ax} = m \cdot \alpha_x \overset{(2)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \mathbf{F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot \alpha_x \ (4)} \\ \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + F_{Ay} - W = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \mathbf{F \cdot \eta\mu\varphi - mg = 0 \ (5)} \end{cases}$$

Ερώτημα 1:

- **Υπολογισμός της δύναμης F**

$$\text{απο τη σχέση } (5) \Rightarrow F \cdot \eta\mu\varphi - mg = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow \mathbf{F = \sqrt{2} \cdot mg \ (6)}$$

Ερώτημα 2:

- **Υπολογισμός της απόστασης x**

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

$$\Sigma\vec{\tau}_O = I_O \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) + F_y \cdot 0 + W \cdot 0 + F_{Ay} \cdot 0 + F_{Ax} \cdot 0 = I_O \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) = I_O \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) = \left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) \cdot m \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m \cdot \alpha_x \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) = \left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) \cdot m \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot x \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) = \left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \xRightarrow{\alpha_{\gamma\omega\nu.} \neq 0} x \cdot \left(\frac{\ell}{2} + x\right) = \left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ell \cdot x}{2} + x^2 = \frac{\ell^2}{12} + x^2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{\ell}{6} \ (7)}$$

Ερώτημα 3:

- **Υπολογισμός της επιτάχυνσης (α_x) του κέντρου μάζας**

$$\text{απο τη σχέση } (4) \Rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot \alpha_x \Rightarrow \alpha_x = \frac{F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{m} \overset{(6)}{\Rightarrow} \alpha_x = \frac{\sqrt{2} \cdot mg \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{\alpha_x = g \ (8)}$$

- **Υπολογισμός της γωνιακής επιτάχυνσης ($\alpha_{\gamma\omega\nu.}$)**

απο τη σχέση $(2) \Longrightarrow \alpha_x = \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot x \Longrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.} = \dfrac{\alpha_x}{x} \xrightarrow{(7),(8)} \alpha_{\gamma\omega\nu.} = \dfrac{g}{\frac{\ell}{6}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \dfrac{6g}{\ell}\ (9)}}$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής