Ισορροπία-ροπές και κάθετη αντίδραση.

Ας ξεκινήσουμε με ένα ερώτημα:

Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται διάφορες ομοεπίπεδες δυνάμεις, δεν στρέφεται, τότε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι ίσο με μηδέν».

Είναι σωστή ή λανθασμένη η πρόταση αυτή;

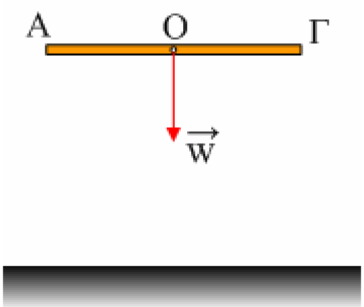
Η πρόταση είναι λάθος…

Η πρόταση είναι λανθασμένη γιατί δεν αναφέρει τίποτα για την συνισταμένη δύναμη. Αν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, τότε αν υπάρχουν ροπές αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων και για να μην αρχίσει να περιστρέφεται θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να είναι μηδέν. Και αφού μιλάμε για ζεύγη δυνάμεων έχουμε το δικαίωμα να πάρουμε τις ροπές ως προς οποισήποτε σημείο, αφού η ροπή ενός ζεύγους είναι ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς μας.

Αλλά αν η συνισταμένη δύναμη δεν είναι μηδενική; Αν δηλαδή το σώμα επιταχύνεται; Τότε θα πρέπει να πάρουμε ***υποχρεωτικά το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς προς το κέντρο μάζας του στερεού,*** γιατί αν το στερεό περιστραφεί, θα περιστραφεί γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων που περνά από το κέντρο μάζας του. Ως προς άλλα σημεία μπορεί η συνολική ροπή να είναι διάφορη του μηδενός, αλλά αυτό δεν μας απασχολεί.

Παράδειγμα 1ο:

Αφήνουμε μια ομογενή ράβδο ΑΓ να πέσει ελεύθερα, από μικρό ύψος, από οριζόντια θέση. Προφανώς η ράβδος εκτελεί ελεύθερη πτώση, χωρίς να περιστρέφεται.



Να υπολογιστεί η συνολική ροπή που ασκείται πάνω της:

α) Ως προς το μέσον της Ο.

β) Ως προς το ένα της άκρο Α.

Απάντηση:

α) Ως προς το μέσον της Ο: $\Sigma\tau = w\cdot d = w\cdot 0 = 0$

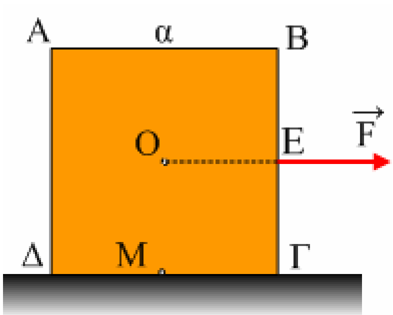
β) Ως προς το άκρο Α: $\Sigma\tau = -\,w\cdot l/2$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ροπή ως προς άκρο Α δεν είναι μηδέν, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η ράβδος θα αρχίσει να περιστρέφεται.

Παράδειγμα 2ο:

Ένας κύβος πλευράς α=1m και βάρους w=1000N ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}4$.

1) Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο.
2) Ασκούμε πάνω του οριζόντια δύναμη F=300N, όπως στο σχήμα, όπου (ΒΕ)=(ΕΓ) και ο κύβος δεν κινείται.
   i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο και να υπολογίστε τα μέτρα τους.
   ii) Να βρεθεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο κύβο ως προς:



α) Το κέντρο Ο του κύβου.

β) Της κορυφής Α.

Απάντηση:

- Ο κύβος ισορροπεί συνεπώς:

$$\Sigma F= 0 \ (1)$$

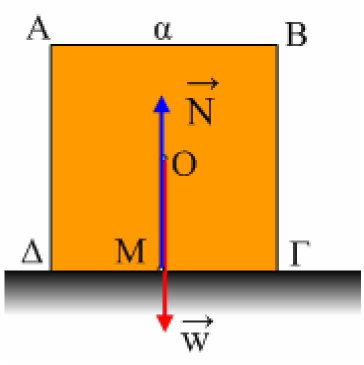
$$\Sigma\tau=0 \ (2)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο είναι το βάρος του w και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου Ν. Με βάση την σχέση (1) Ν=w=1000Ν.

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το κέντρο Ο, έχουμε:

$w\cdot 0 + N\cdot x= 0 \rightarrow x=0$, όπου x η απόσταση του Ο από τον φορέα της Ν. Η κάθετη αντίδραση λοιπόν ασκείται στο κέντρο της βάσης Μ.

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο.



3) Η μέγιστη τιμή της τριβής που μπορεί να ασκηθεί στον κύβο είναι η οριακή τριβή $T_{ορ}=μ_s·N$ (1), αλλά στον κατακόρυφο άξονα ο κύβος ισορροπεί επομένως $ΣF_y=0$ ή N=w=1000N, οπότε:

$$T_{ορ}= μ_s·N = 0{,}4·1000N=400N.$$

Στον άξονα x οι ασκούμενες δυνάμεις είναι η F και η τριβή. Αφού η δύναμη που ασκούμε είναι μικρότερη από 400N, ο κύβος δεν θα επιταχυνθεί στον άξονα x, οπότε:

$$ΣF_x=0 \rightarrow F\text{-}T=0 \rightarrow T=T_{στ}=F=300N.$$

Ας πάρουμε τώρα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το κέντρο Ο του κύβου:

$$Στ=τ_w+ τ_T+τ_F+τ_N= w·0 - T·\frac{a}{2} + F·0 + N·x = N·x - T·\frac{a}{2}$$

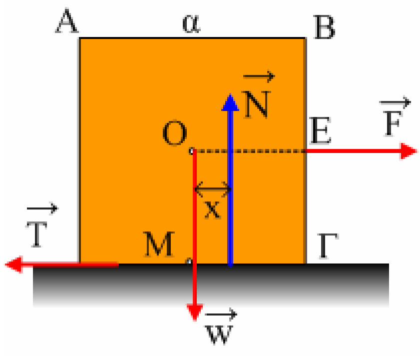
Αλλά αφού ο κύβος ισορροπεί $Στ=0 \rightarrow$

$$N·x - T·\frac{a}{2} =0 \rightarrow$$

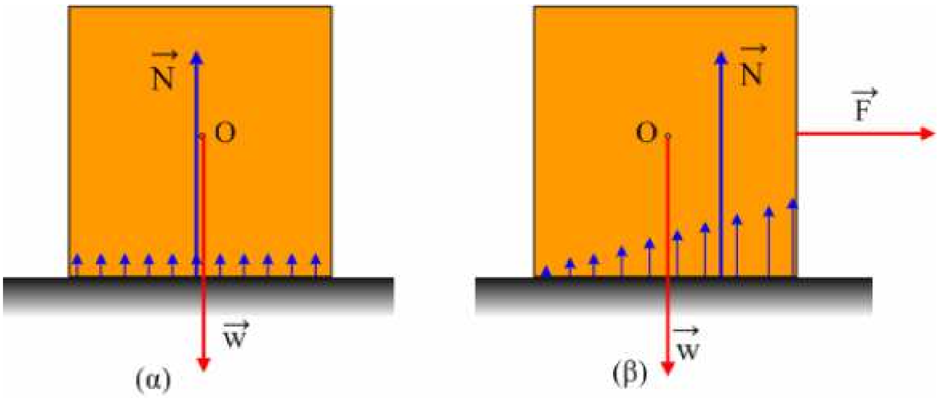
$$1000x=300·0{,}5 \rightarrow$$

$$x=0{,}15m$$

Τι βρήκαμε; Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N δεν περνά από το κέντρο Ο, αλλά είναι μετατοπισμένη κατά x=0,15m προς τα δεξιά όπως στο σχήμα.



Γιατί να συμβαίνει αυτό; Στην πραγματικότητα η N είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον κύβο από το δάπεδο. Στο α΄υποερώτημα το έδαφος πιέζεται από το σώμα ομοιόμορφα οπότε και οι δυνάμεις που δέχεται από το δάπεδο είναι όπως στο σχήμα (α), μόλις ασκηθεί πλάγια δύναμη όμως οι δυνάμεις δεν ασκούνται ομοιόμορφα, αλλά όπως στο σχήμα (β), όποτε στην (α) η συνισταμένη περνά από το μέσον, ενώ στην (β) όχι.



Παίρνοντας τις ροπές τώρα ως προς την κορυφή Α έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = -w\cdot\frac{a}{2} - T\cdot\alpha + F\cdot\frac{a}{2} + N\cdot\left(\frac{a}{2}+x\right)$$

$$\Sigma\tau_A = -1000\cdot0{,}5 - 300\cdot1 + 300\cdot0{,}5 + 1000\cdot0{,}65 = 0$$

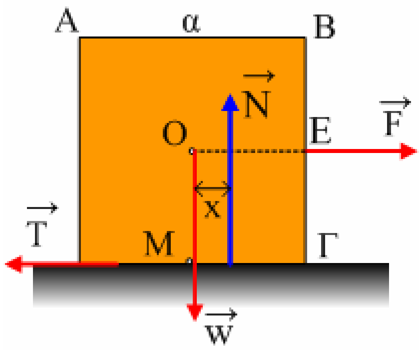
Συμπέρασμα αφού η ΣF=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν πάρουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών θα είναι μηδέν.

Παράδειγμα 3ο:

Αν η δύναμη F στο προηγούμενο παράδειγμα είχε μέτρο F=500N, να βρεθεί η συνολική ροπή ως προς την κορυφή Α.

Απάντηση:

Δεν ξέρουμε τώρα αν ισορροπεί ο κύβος. Αν κάνει μόνο μεταφορική ή και στροφική κίνηση (αν ανατρέπεται). Οι δυνάμεις είναι ξανά αυτές του παρακάτω σχήματος.



Αφού $F > T_{op}$ ο κύβος επιταχύνεται προς τα δεξιά και η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $T_{ολ} = \mu\cdot N = 400N$.

Δηλαδή ο κύβος αποκτά επιτάχυνση που υπολογίζεται από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F-T}{m} = 2m/s^2.$$

Έστω ότι ο κύβος επιταχύνεται μεν προς τα δεξιά χωρίς όμως να στρέφεται. Τότε ως προς το κέντρο μάζας Ο θα ισχύει $\Sigma\tau = 0 \rightarrow$

$$w\cdot0 + N\cdot x - T\cdot\frac{a}{2} + F\cdot0 = 0 \rightarrow$$

$$x=T\cdot \frac{a}{2}\cdot N = 400\cdot ½ \cdot 1000m = 0{,}2m.$$

Δηλαδή ο φορέας της N περνάει από την βάση στήριξης και απλά είναι μετατοπισμένος κατά 0,2m από το μέσον Μ, πράγμα που μπορεί να συμβαίνει. Παρατηρήστε ότι η απόσταση αυτή έχει αυξηθεί σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα που ήταν 0,15m.

Αν πάρουμε τώρα τις ροπές ως προς το Α έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = -w\cdot \frac{a}{2} - T\cdot\alpha + F\cdot \frac{a}{2} + N\cdot\left(\frac{a}{2}+x\right) \rightarrow$$

$$\Sigma\tau_A = -1000\cdot 0{,}5 - 400\cdot 1 + 600\cdot 0{,}5 + 1000\cdot 0{,}7 = +100N\cdot m$$

Όταν λοιπόν επιταχύνεται μεταφορικά ο κύβος χωρίς να περιστρέφεται, η συνολική ροπή είναι μηδέν, μόνο ως προς το κέντρο μάζας Ο και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

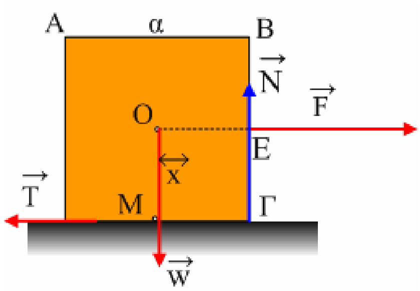
Παράδειγμα 4^o:

Και πότε μπορεί να ανατραπεί ο κύβος;

Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης F. Ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της F για την οποία ο κύβος ανατρέπεται;

Απάντηση:

Είδαμε ότι αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης η κάθετη αντίδραση N απομακρύνεται από το μέσον Μ της βάσης προς τα δεξιά. Συνεπώς θα έλθει κάποια στιγμή που θα ασκείται στην κορυφή Γ, όπως στο σχήμα.



Στην κατάσταση αυτή ο κύλινδρος είναι έτοιμος να ανατραπεί. Στην πραγματικότητα ακουμπά στο έδαφος μόνο κατά μήκος της ακμής που περνά από την κορυφή Γ.

Όταν ο κύλινδρος θα ανατραπεί σημαίνει ότι θα περιστραφεί γύρω γύρω από άξονα που περνά από το Γ και για να συμβεί αυτό πρέπει η δεξιόστροφη ροπή της F να είναι μεγαλύτερη της αριστερόστροφης ροπής του βάρους, κατά μέτρο (οι ροπές της N και της τριβής είναι μηδενικές):

$$F\cdot \frac{a}{2} > w\cdot \frac{a}{2} \rightarrow$$

$$F > w$$

Συνεπώς πρέπει η δύναμη F να είναι μεγαλύτερη από 1000N, ώστε να ανατραπεί ο κύβος.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης