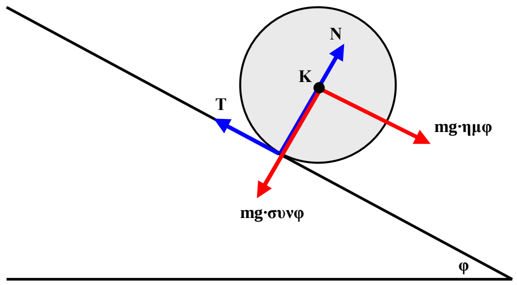
Μελέτη της κίνησης ενός σώματος που μπορεί να κυλάει σε κεκλιμένο επίπεδο (π.χ. σφόνδυλος, κύλινδρος, σφαίρα, κλπ.)

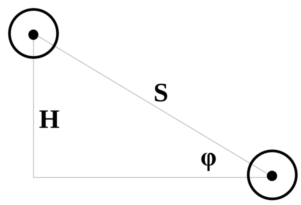


Το σώμα του σχήματος έχει μάζα **m**, ακτίνα **R** και μπορεί να είναι:

- Σφόνδυλος (στεφάνη), $\mathbf{I = mR^2}$
- Κύλινδρος ή δίσκος, $\mathbf{I = \frac{1}{2} \cdot mR^2}$
- Σφαίρα, $\mathbf{I = \frac{2}{5} \cdot mR^2}$
- Γενικά, ένα σώμα ικανό να κυλάει, με ροπή αδράνειας $\boxed{\mathbf{I = \lambda \cdot mR^2}}$

ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας K όπου **λ** κάποιος αριθμητικός συντελεστής.

Το κεκλιμένο επίπεδο παρουσιάζει συντελεστή τριβής **μ** και γωνία κλίσης **φ**.



Υποθέτουμε ότι το σώμα είναι **ακίνητο αρχικά** και το **αφήνουμε ελεύθερο** να κινηθεί. Θα προσδιορίσουμε διάφορα στοιχεία της κίνησής του, μετά από **μετακίνηση S** κατά μήκος του κεκλιμένου, ή αφού θα έχει κατέβει κατά **ύψος H** από τη αρχική θέση. Προφανώς ισχύει: $\boxed{\mathbf{H = S \cdot ημφ}}$

- Για μικρές γωνίες κλίσης το σώμα μπορεί να **κυλάει χωρίς ολίσθηση**. Στην περίπτωση αυτή η τριβή **T** είναι **στατική** και ισχύει $\mathbf{T \le μ \cdot A}$ (η ισότητα οριακά).
- Για μεγαλύτερες γωνίες θα **περιστρέφεται**, **γλιστρώντας ταυτόχρονα** πάνω στο κεκλιμένο. Τότε έχουμε **τριβή ολίσθησης** που είναι $\mathbf{T = μ \cdot A}$.
- Αφού η κίνηση είναι ευθύγραμμη ισχύει $\mathbf{\Sigma F_y = 0} \rightarrow \mathbf{N = mg \cdot συνφ}$ και τελικά η τριβή είναι:

  Στατική τριβή: $\boxed{\mathbf{T \le μ \cdot m \cdot g συνφ}}$, ή τριβή ολίσθησης: $\boxed{\mathbf{T = μ \cdot m \cdot g συνφ}}$

Η κίνηση του σώματος είναι σύνθετη, συνδυασμός **μεταφορικής** κίνησης του κέντρου μάζας K και **στροφικής** ως προς άξονα που διέρχεται από αυτό.

Ονομάζουμε **S**, **υ**, **α** τα γραμμικά στοιχεία (μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση) της μεταφορικής κίνησης και **S΄**, **υ΄**, **α΄** τα γραμμικά στοιχεία της στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας του σώματος. Τα τελευταία σχετίζονται με τα αντίστοιχα γωνιακά μεγέθη **θ**, **ω**, $\mathbf{α_{γων}}$ της στροφικής κίνησης. Έτσι έχουμε:

Μεταφορική κίνηση	*Στροφική κίνηση*	*Κύλιση (υ = υ΄)*	*Ολίσθηση – περιστροφή*
S	**S΄ = θ·R**	**S = S΄ = θ·R**	**S > S΄**
υ	**υ΄ = ω·R**	**υ = υ΄ = ω·R**	**υ > υ΄**
α	$\mathbf{α΄ = α_{γων} \cdot R}$	$\mathbf{α = α΄ = α_{γων} \cdot R}$	**α > α΄**

Τα διαθέσιμα εργαλεία είναι:

- Οι νόμοι του Newton ή οι γενικευμένες μορφές τους.
- Οι εξισώσεις της κινηματικής (αν οι κινήσεις είναι ομαλά μεταβαλλόμενες).
- Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ, συντηρητικές δυνάμεις).
- Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ).

Α. Το σώμα κυλίεται χωρίς ολίσθηση

Ζητάμε την ταχύτητα υ μετά από μετατόπιση S (ή απώλεια ύψους Η)

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ:

Με τους νόμους του Νεύτωνα και τις εξισώσεις της κινηματικής

$\Sigma F = m\cdot\alpha \rightarrow \boxed{m\cdot g\cdot \eta\mu\varphi - T = m\cdot\alpha}$ *(1)*

$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = \lambda\cdot m\cdot R^2\cdot {}^{\alpha}/_{R} \rightarrow \boxed{T = \lambda\cdot m\cdot\alpha}$ *(2)*

$(\alpha_{\gamma\omega\nu} = {}^{\alpha'}/_{R} = {}^{\alpha}/_{R})$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν η επιτάχυνση **α** του κέντρου μάζας και η στατική τριβή **T**:

$$\alpha = \frac{g\cdot\eta\mu\varphi}{\lambda+1} \quad (3) \quad \text{και} \quad T = \frac{\lambda\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi}{\lambda+1} \quad (4)$$

Από τις εξισώσεις τώρα της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης έχουμε:

$S = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2$

$\upsilon = \alpha\cdot t \rightarrow t = {}^{\alpha}/_{\upsilon}$

$\rightarrow \boxed{S = \upsilon^2/_{2\cdot\alpha}}$ *(5)* **ή αλλιώς** $\boxed{\upsilon = \sqrt{2\cdot\alpha\cdot S}}$ *(6)*

Και τελικά από τις σχέσεις (3) και (6) βρίσκουμε την ταχύτητα **υ** του κέντρου μάζας:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\eta\mu\varphi\cdot S}{\lambda+1}} \quad (7) \quad \text{ή} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H}{\lambda+1}} \quad (8)$$

Παραδείγματα			
Σφόνδυλος (λ = 1)	$\alpha = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$T = \frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$\upsilon = \sqrt{g\cdot H}$
Κύλινδρος (λ = 1/2)	$\alpha = \frac{2}{3}\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$T = \frac{1}{3}\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot g\cdot H}$
Σφαίρα (λ = 2/5)	$\alpha = \frac{5}{7}\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$T = \frac{2}{7}\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi$	$\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot g\cdot H}$

Παρατήρηση 1:

Αφού έχουμε σταθερές δυνάμεις και ροπές, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά τη γενικευμένη μορφή των νόμων του Νεύτωνα για όλη τη διάρκεια **Δt** της κίνησης:

$$\Sigma F = \frac{dP}{dt} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \rightarrow \boxed{(m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi - T)\cdot\Delta t = m\cdot\upsilon} \quad (9) \quad \text{και:}$$

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \rightarrow T\cdot R\cdot\Delta t = I\cdot\omega \xrightarrow{\omega={}^{\upsilon'}/_{R}={}^{\upsilon}/_{R}} T\cdot R\cdot\Delta t = \lambda\cdot m\cdot R^2\cdot\frac{\upsilon}{R} \rightarrow$$

$\boxed{T\cdot\Delta t = \lambda\cdot m\cdot\upsilon}$ *(10)*

Για να μπει στη λύση η μετατόπιση **S** πάλι χρειαζόμαστε κινηματική, αλλά τώρα δεν χρειάζεται η επιτάχυνση **α**. Μπορούμε λοιπόν εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε τη μέση ταχύτητα, η οποία στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση είναι: $\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_{\alpha\rho\chi.} + \upsilon_{\tau\varepsilon\lambda.}}{2}$

Έτσι έχουμε:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \frac{0+\upsilon}{2} = \frac{S-0}{\Delta t} \rightarrow \boxed{2\cdot S = \upsilon\cdot\Delta t} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (9), (10) και (11) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα μεγέθη **T**, **Δt** και την ζητούμενη ταχύτητα **υ**.

Παρατήρηση 2:

Αν το επίπεδο ήταν *λείο*, δηλαδή **μ=0** και **T=0**, τότε θα είχαμε **μόνο ολίσθηση** και όχι περιστροφή, δηλαδή μόνο τη μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m\cdot\alpha \rightarrow m\cdot g\cdot \eta\mu\varphi = m\cdot\alpha$ οπότε: $\boxed{\alpha = g\cdot\eta\mu\varphi}$ και $\boxed{\upsilon = \sqrt{2\cdot g\cdot H}}$ *για όλα τα σώματα.*

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ:

Με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ)

$$m\cdot g\cdot H + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 \rightarrow 2\cdot m\cdot g\cdot H = m\cdot\upsilon^2 + \lambda\cdot m\cdot R^2\cdot {}^{\upsilon^2}/_{R^2} \quad (12)$$

$(\omega = {}^{\upsilon'}/_{R} = {}^{\upsilon}/_{R})$

και με πράξεις βρίσκουμε πάλι: $\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H}{\lambda+1}}}$

Παρατήρηση 1:

Μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε το **θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ)** ως εξής:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma W_F = \Delta K_{\mu\varepsilon\tau.} \rightarrow \boxed{m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi\cdot S - T\cdot S = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 - 0}$ (13)

Στροφική κίνηση: $\Sigma W_\tau = \Delta K_{\pi\varepsilon\rho.} \rightarrow T\cdot R\cdot\theta = \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 - 0 \rightarrow \boxed{+\,T\cdot S = \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2}$ (14)

$(\theta = {}^{S'}/_{R} = {}^{S}/_{R})$

Παρατηρήστε ότι η στατική τριβή **T** δεν παίζει συνολικά ρόλο, λειτουργεί όμως σαν «συνδετικός κρίκος» ανάμεσα στις δύο επιμέρους κινήσεις. Μεταφέρει δηλαδή ενέργεια από τη μία κίνηση στην άλλη.

Αφαιρεί μέσω του έργου **–T·S** από την μεταφορική κίνηση και την προσφέρει μέσω του έργου της ροπής της **T·R·θ** στην στροφική κίνηση. Έτσι, η προσφερόμενη από το έργο του βάρους ενέργεια **m·g·ημφ·S**, *με άλλα λόγια η αρχική δυναμική ενέργεια* **m·g·H**, μοιράζεται στις δύο κινήσεις. Πράγματι με πρόσθεση των (13) και (14) παίρνουμε: $m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi\cdot S = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2$ που εκφράζει την ΑΔΜΕ. Καταλήγουμε δηλαδή πάλι στην σχέση (8).

Παρατήρηση 2:

Η *τιμή της ροπής αδράνειας* καθορίζει σε ποιό ποσοστό θα μοιραστεί η αρχική δυναμική ενέργεια σε κάθε επιμέρους κίνηση. Πράγματι με τη βοήθεια της (8):

$$K_{\mu\varepsilon\tau.} = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 \rightarrow K_{\mu\varepsilon\tau.} = \frac{m\cdot g\cdot H}{\lambda+1} \quad \text{ή} \quad \boxed{K_{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{U}{\lambda+1}} \quad \text{και} \quad \boxed{K_{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{\lambda\cdot U}{\lambda+1}}$$

Έτσι, στα τρία παραδείγματα έχουμε:		$K_{\mu\varepsilon\tau.}$	$K_{\pi\varepsilon\rho.}$
	Σφόνδυλος (λ = 1)	**50% U**	**50% U**
	Κύλινδρος (λ = 1/2)	**66,7% U**	**33,3% U**
	Σφαίρα (λ = 2/5)	**71,4% U**	**28,6% U**

Β. Οριακή κατάσταση κύλισης

Ζητάμε την μέγιστη γωνία $\varphi_{o\rho.}$ για την οποία έχουμε κύλιση

Για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει *να μην ξεπερνάει η στατική τριβή το όριό της*. Να ικανοποιείται δηλαδή η συνθήκη $\boxed{\mathbf{T \le \mu \cdot m \cdot g\,\sigma\upsilon\nu\varphi}}$ όπου *η ισότητα ισχύει οριακά* και από εκεί θα βρούμε και τη ζητούμενη μέγιστη γωνία **φ**.

Από τους νόμους του Νεύτωνα για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση, σχέσεις (1) και (2), είχαμε υπολογίσει τη στατική τριβή (3):

$$\boxed{\mathbf{T = \frac{\lambda \cdot m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi}{\lambda + 1}}}$$

Η σχέση αυτή με τη βοήθεια και της συνθήκης κύλισης δίνει:

$$\mathbf{\frac{\lambda \cdot m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi}{\lambda + 1} \le \mu \cdot m \cdot g\,\sigma\upsilon\nu\varphi \;\rightarrow\; \varepsilon\varphi\varphi \le \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \mu} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{\varepsilon\varphi\varphi_{o\rho.} = \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \mu}} \quad \textit{(15)}$$

Μέγιστη γωνία κύλισης στα παραδείγματα		
	$\varepsilon\varphi\varphi_{o\rho.}$	$\varphi_{o\rho.}$ *για* μ=0,2
Σφόνδυλος (λ = 1)	$\varepsilon\varphi\varphi_{o\rho.} = 2 \cdot \mu$	~ 22°
Κύλινδρος (λ = 1/2)	$\varepsilon\varphi\varphi_{o\rho.} = 3 \cdot \mu$	~ 31°
Σφαίρα (λ = 2/5)	$\varepsilon\varphi\varphi_{o\rho.} = 3{,}5 \cdot \mu$	~ 35°

Γ. Το σώμα ολισθαίνει και περιστρέφεται

Μετά από μετατόπιση S (ή απώλεια ύψους Η) ζητάμε:

- ***την ταχύτητα υ, τη γωνία στροφής θ και τη γωνιακή ταχύτητα ω***
- ***τη θερμότητα Q που εκλύεται λόγω της ολίσθησης***

Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης διαφέρουν, όπως είπαμε και στην αρχή, από τα αντίστοιχα γραμμικά στοιχεία της στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας του σώματος. Ισχύουν δηλαδή:

$S > S' = \theta \cdot R$	$\upsilon > \upsilon' = \omega \cdot R$	$\alpha > \alpha' = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$

Επίσης, έχουμε τώρα τριβή ολίσθησης $\boxed{T = \mu \cdot m \cdot g\,\sigma\upsilon\nu\varphi}$ *ίδια για όλα τα σώματα.*

1^ος^ ΤΡΟΠΟΣ:

Με τους νόμους του Νεύτωνα και τις εξισώσεις της κινηματικής

Νόμοι Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha \;\rightarrow\; m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi - \mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = m\cdot\alpha \;\rightarrow\; \boxed{\alpha = g\cdot(\eta\mu\varphi - \mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)} \quad (16)$$

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\; \mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot R = \lambda\cdot m\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\; \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\mu\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\lambda\cdot R}} \quad (17)$$

Κινηματική:

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 \\ \upsilon = \alpha\cdot t \end{array}\right| \rightarrow \upsilon^2 = 2\cdot\alpha\cdot S \xrightarrow{(16)} \upsilon^2 = 2\cdot g\cdot(\eta\mu\varphi - \mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot S \xrightarrow{S=H/\eta\mu\varphi}$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H\cdot(\varepsilon\varphi\varphi - \mu)}{\varepsilon\varphi\varphi}}} \quad (18)$$

Ο χρόνος κίνησης είναι: $t = {}^{\upsilon}/_{\alpha} \;\rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2\cdot S}{g\cdot(\eta\mu\varphi - \mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)}}}$ οπότε βρίσκουμε τα γωνιακά μεγέθη **θ** και **ω**:

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\mu\cdot S}{\lambda\cdot R\cdot(\varepsilon\varphi\varphi - \mu)}} \;\text{ή}\; \boxed{S' = \theta\cdot R = \frac{\mu\cdot S}{\lambda\cdot(\varepsilon\varphi\varphi - \mu)}} \quad (19)$$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \;\rightarrow\; \boxed{\omega = \frac{\mu}{\lambda\cdot R}\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H}{\varepsilon\varphi\varphi\cdot(\varepsilon\varphi\varphi - \mu)}}} \quad (20)$$

Παρατήρηση:

Μπορούμε επίσης, με απαλειφή του χρόνου **t**, να υπολογίσουμε τα γωνιακά μεγέθη **θ** και **ω** από τις σχέσεις:

$\theta = \frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2$ $S = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2$	$\rightarrow\; \theta = {}^{\alpha_{\gamma\omega\nu}}/_{\alpha}\cdot S$ και:	$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$ $\upsilon = \alpha\cdot t$	$\rightarrow\; \omega = {}^{\alpha_{\gamma\omega\nu}}/_{\alpha}\cdot\upsilon$

Η θερμότητα που αναπτύσσεται κατά την κάθοδο μπορεί να βρεθεί είτε από τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας:

$$\mathbf{Q = U_{πάνω} - K_{ολ,\,κάτω}}$$

είτε από το έργο της τριβής ολίσθησης:

$$\mathbf{Q = |W_T| = T\cdot(S - S')}$$

Πιο κάτω θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα με ενεργειακούς υπολογισμούς.

2ος ΤΡΟΠΟΣ:

Με το ΘΜΚΕ και τους νόμους του Νεύτωνα στη γενικευμένη τους μορφή (ή τις εξισώσεις της κινηματικής)

$\mathbf{\Sigma W_F = \Delta K_{μετ.}} \rightarrow \boxed{\mathbf{m\cdot g\cdot ημφ\cdot S - μ\cdot m\cdot g\cdot συνφ\cdot S = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot υ^2 - 0}}$ *(21)*

$\mathbf{\Sigma W_τ = \Delta K_{περ.}} \rightarrow \mathbf{μ\cdot m\cdot g\cdot ημφ\cdot R\cdot θ = \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot ω^2 - 0}$ *(22)*

ή αλλιώς: $\boxed{\mathbf{+\,μ\cdot m\cdot g\cdot συνφ\cdot S' = \tfrac{1}{2}\cdot I\cdot ω^2}}$ *(22α)*

Παρατηρήστε ότι η τριβή μεταφέρει τώρα στη στροφική κίνηση λιγότερη ενέργεια από αυτή που αφαιρεί από τη μεταφορική κίνηση (**S΄< S**). Αυτή ακριβώς η διαφορά είναι η θερμότητα που εκλύεται λόγω της ολίσθησης.

Από την (21) βρίσκουμε την ταχύτητα υ: $\boxed{\mathbf{υ = \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H\cdot(εφφ - μ)}{εφφ}}}}$

Επίσης:

$\mathbf{\Sigma F = \frac{dP}{dt} = \frac{\Delta P}{\Delta t}} \rightarrow \boxed{\mathbf{(m\cdot g\cdot ημφ - μ\cdot m\cdot g\cdot συνφ)\cdot\Delta t = m\cdot υ - 0}}$ *(23)* και:

$\mathbf{\Sigma τ = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t}} \rightarrow \boxed{\mathbf{μ\cdot m\cdot g\cdot ημφ\cdot R\cdot\Delta t = I\cdot ω - 0}}$ *(24)*

Έτσι, από (23), (24) βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα **ω** (και το χρόνο **Δt** της κίνησης αν μας χρειάζεται) και από (22) τη γωνία στροφής **θ**. Εναλλακτικά, τον χρόνο **t** της κίνησης, μπορούμε να τον βρούμε και από τη σχέση της μέσης ταχύτητας $\mathbf{S = {}^{υ}/_{2}\cdot t}$

Υπολογισμός της θερμότητας που ελευθερώνεται κατά την ολίσθηση

$\mathbf{Q = |W_T| = T\cdot(S - S')} \xrightarrow{(19)} \mathbf{Q = μ\cdot m\cdot g\cdot συνφ\cdot S\cdot\left[1 - \frac{μ}{λ\cdot(εφφ - μ)}\right]}$ ή αλλιώς:

$$\boxed{\mathbf{Q = m\cdot g\cdot H\cdot\frac{μ}{εφφ}\cdot\left[1 - \frac{μ}{λ\cdot(εφφ - μ)}\right]}} \quad \textit{(25)}$$

Δ. Συγκριτικοί πίνακες για την κίνηση στο κεκλιμένο

1. Κύλιση χωρίς ολίσθηση

	(1) $εφφ_{ορ}$	Τ	α	υ	$α_{γων}$	ω	θ	S΄	$K_{μετ.}$ % της U	$K_{περ.}$ % της U	Q % της U
Σφόνδυλος λ=1	2μ	0,50·mgημφ	0,50·gημφ	$\sqrt{gH}$	$α/R$	$υ/R$	S/R	S	50 %	50 %	0 %
Κύλινδρος λ=0,5	3μ	0,33·mgημφ	0,67·gημφ	$1,15\sqrt{gH}$	$α/R$	$υ/R$	S/R	S	66,7 %	33,3 %	0 %
Σφαίρα λ=0,4	3,5μ	0,29·mgημφ	0,71·gημφ	$1,20\sqrt{gH}$	$α/R$	$υ/R$	S/R	S	71,4 %	28,6 %	0 %

(1) Π.χ. αν **μ=0,2** τότε οι αντίστοιχες οριακές γωνίες για κύλιση είναι, όπως είδαμε: ~ **22°** για το σφόνδυλο, ~ **31°** για τον κύλινδρο και ~ **35°** για τη σφαίρα.

2. Ολίσθηση με ταυτόχρονη περιστροφή

Για ευκολότερη σύγκριση θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές: **εφφ=5·μ** και **εφφ=6·μ**

<table>
<tr><th></th><th>Τ</th><th>α</th><th>(3) υ</th><th>(2) $α_{γων}$</th><th>(2) ω</th><th>(2) θ</th><th>(2) S΄</th><th>(3) $K_{μετ.}$ % της U</th><th>$K_{περ.}$ % της U</th><th>Q % της U</th></tr>
<tr><td>Σφόνδυλος λ=1</td><td rowspan="3">0,2·mgσυνφ</td><td rowspan="3">g·(ημφ-μσυνφ)</td><td rowspan="3">$1,26\sqrt{gH}$
$1,33\sqrt{gH}$</td><td>$α_{γων}$</td><td>ω</td><td>θ</td><td>S΄</td><td rowspan="3">80 %
87,5 %</td><td>5 %
1,4 %</td><td>15 %
11,1 %</td></tr>
<tr><td>Κύλινδρος λ=0,5</td><td>$2·α_{γων}$</td><td>2·ω</td><td>2·θ</td><td>2·S΄</td><td>10 %
2,8 %</td><td>10 %
9,7 %</td></tr>
<tr><td>Σφαίρα λ=0,4</td><td>$2,5·α_{γων}$</td><td>2,5·ω</td><td>2,5θ</td><td>2,5· S΄</td><td>12,5 %
3,5 %</td><td>7,5 %
9 %</td></tr>
</table>

(2) Οι τιμές των μεγεθών της στροφικής κίνησης ***για το σφόνδυλο (λ=1)*** είναι:

$α_{γων} = \dfrac{μgσυνφ}{R}$	$ω \cdot R = μ\sqrt{\dfrac{2gH}{εφφ(εφφ-μ)}}$	$θ \cdot R = S΄ = \dfrac{μ}{εφφ-μ} \cdot S$
Όταν **εφφ=5·μ** τότε:	$ω \cdot R = 0,32\sqrt{gH}$	**θ·R = S΄ = 0,25·S**
Όταν **εφφ=6·μ** τότε:	$ω \cdot R = 0,26\sqrt{gH}$	**θ·R = S΄ = 0,20·S**

(3) Οι τιμές των **υ** και $K_{μετ.}$ της μεταφορικής κίνησης ***για όλα τα σώματα*** είναι:

$υ = \sqrt{\dfrac{2gH(εφφ-μ)}{εφφ}}$	$K_{μετ.} = \dfrac{εφφ-μ}{εφφ} U$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια
Διονύσης Μητρόπουλος