Γενικευμένη μορφή του 2ου Ν.Ν και αρχές διατήρησης

Γνωρίζουμε ότι ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη **μεταφορική** κίνηση: $\Sigma F = ma_{cm}$ και για την **περιστροφική** κίνηση: $\Sigma\tau = I a_{\gamma\omega\nu}$ προκύπτει από την αντίστοιχη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου Newton εφόσον η μάζα και η ροπή αδράνειας του στερεού αντίστοιχα, παραμένουν σταθερές.

Η γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου Newton εκφράζεται από τις σχέσεις:

$\Sigma F = \frac{dp}{dt}$ για τη **μεταφορική** κίνηση, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του στερεού είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη στο σώμα

$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ για την **περιστροφική** κίνηση, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς ορισμένο άξονα περιστροφής, είναι ίσος με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον ίδιο άξονα.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν και οι βασικές **αρχές διατήρησης** της **ορμής** για τη **μεταφορική** και της **στροφορμής** για την **περιστροφική** κίνηση. Αν θεωρήσουμε λοιπόν ένα σύστημα σωμάτων, όπου οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ως ζεύγη δράσης-αντίδρασης, οπότε έχουν ΣF=0 και Στ=0, τότε:

1) Αν το σύστημα είναι **μονωμένο**, $\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0$ και $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$, δεν υπάρχει μεταβολή ορμής και στροφορμής αντίστοιχα, οπότε η ορμή και η στροφορμή διατηρούνται κατά τη διάρκεια του φαινομένου, π.χ.: κίνηση δύο φορτισμένων σωματιδίων υπό την επίδραση μόνο της μεταξύ τους ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης, κίνηση ανθρώπου πάνω σε περιστρεφόμενη εξέδρα.

2) Αν η **διάρκεια** του φαινομένου είναι **αμελητέα** τότε:

$\Sigma F \cdot \Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta p \to 0 \Rightarrow p = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$ για τη μεταφορική κίνηση

$\Sigma\tau \cdot \Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta L \to 0 \Rightarrow L = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$ για την περιστροφική κίνηση

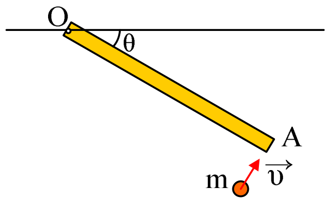
Φαινόμενα αμελητέας χρονικής διάρκειας είναι οι κάθε μορφής **κρούσεις**, οι οποίες αρχίζουν και τελειώνουν στην ίδια θέση. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε περιπτώσεις διατήρησης ορμής και στροφορμής για κάποιες ειδικές περιπτώσεις κρούσεων .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ξύλινη πόρτα μάζας M και πλάτους d στηρίζεται χωρίς τριβές σε μεντεσέδες, ώστε να σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο τοίχο. Μια σφαίρα μάζας m που εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα υ, χτυπά κάθετα την πόρτα και καρφώνεται στο άκρο της ακαριαία. Να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτού ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου μάζας M και πλευρών a, b ως προς άξονα παράλληλο προς την πλευρά b που διέρχεται από το κέντρο μάζας του: $I_{cm} = \frac{1}{12} M a^2$

ΛΥΣΗ



Η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από τους μεντεσέδες, υπολογίζεται από το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{cm} + M(\frac{d}{2})^2 = \frac{1}{12}Md^2 + M\frac{d^2}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{3}Md^2$$

αφού η πλευρά a του παραλληλεπιπέδου ταυτίζεται με το πλάτος d της πόρτας.

Η απόσταση του φορέα της ταχύτητας της σφαίρας από τον άξονα που διέρχεται από τους μεντεσέδες είναι d, οπότε η στροφορμή της σφαίρας πριν την κρούση ως προς τον άξονα που διέρχεται από τους μεντεσέδες είναι:

$$L = m\upsilon d \quad (1)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος πόρτα-σφαίρα μετά την κρούση είναι ίση με:

$$I_{ολ} = \frac{1}{3}Md^2 + md^2 = \frac{(M+3m)d^2}{3} \quad (2)$$

Επειδή η κρούση έχει **αμελητέα διάρκεια**, η στροφορμή του συστήματος σφαίρα-πόρτα, ως προς τον άξονα που διέρχεται από τους μεντεσέδες διατηρείται σταθερή:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = \frac{(M+3m)d^2}{3}\omega \Rightarrow \omega = \frac{3m\upsilon}{(M+3m)d} \quad (3)$$

Η σχέση (3) δίνει τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει να στρέφεται το σύστημα πόρτα-σφαίρα αμέσως μετά την κρούση. Κατά τη διάρκεια της κίνησης δεν αναπτύσσονται ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής (το βάρος έχει διεύθυνση παράλληλη στον άξονα περιστροφής), οπότε η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται σταθερή, δηλαδή η πόρτα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και διαγράφει τη γωνία θ σε χρόνο:

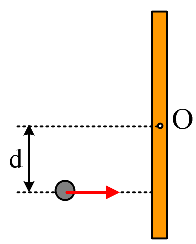
$$\theta = \omega t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\theta(M+3m)d}{3m\upsilon}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μια ράβδος μήκους l και μάζας M ηρεμεί πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια (παγοπίστα). Ένας δίσκος του hockey μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ κάθετη στη ράβδο. Ο δίσκος συγκρούεται **ελαστικά** με τη ράβδο σε απόσταση d από το μέσο της. Πόση πρέπει να είναι η μάζα του δίσκου, ώστε να **παραμείνει ακίνητος** αμέσως μετά την ελαστική κρούση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ



Εφόσον ο δίσκος **χτυπά τη ράβδο σε σημείο διάφορο του κέντρου μάζας** της, η ράβδος αμέσως μετά την κρούση εκτελεί **μεταφορική** αλλά και **περιστροφική** κίνηση γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσο της ράβδου και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και ο φορέας της ταχύτητας. Επειδή η κρούση είναι ελαστική δεν υπάρχει αλλαγή στη θέση του κέντρου μάζας.

Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Ορμής:**

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = M\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m\upsilon}{M} \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon d = \frac{1}{12}Ml^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{12m\upsilon d}{Ml^2} \quad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι **ελαστική διατηρείται η κινητική** ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = M\frac{m^2\upsilon^2}{M^2} + \frac{1}{12}Ml^2\left(\frac{12m\upsilon d}{Ml^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$m\upsilon^2 = m\upsilon^2\left(\frac{m}{M} + \frac{12md^2}{Ml^2}\right) \Rightarrow 1 = \frac{ml^2 + 12md^2}{Ml^2} \Rightarrow m = M\frac{l^2}{l^2 + 12d^2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ράβδος μάζας Μ και μήκους l βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μικρό κομμάτι πλαστελίνης μάζας Μ με ταχύτητα υ, η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη στη ράβδο, συγκρούεται μ΄ αυτή και κολλά στο άκρο της. Υπολογίστε:

i) την ταχύτητα του κέντρου μάζας

ii) τη γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας

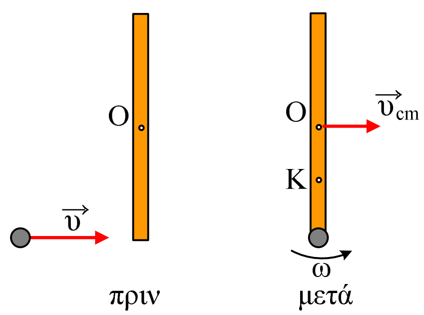
iii) προσδιορίστε το σημείο το οποίο αρχικά παραμένει ακίνητο

iv) τη θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση.

Δίνεται ότι το **κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος-πλαστελίνη** βρίσκεται σε απόσταση x=l/4 από το μέσο της ράβδου, προς την μεριά της πλαστελίνης και η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ

Εφόσον η πλαστελίνη χτυπά **τη ράβδο σε σημείο διάφορο του κέντρου μάζας** της, το σύστημα ράβδος-πλαστελίνη αμέσως μετά την κρούση εκτελεί **μεταφορική** αλλά και **περιστροφική** κίνηση γύρω από άξονα ο οποίος **διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος** και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και ο φορέας της ταχύτητας.



i) Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Ορμής:**

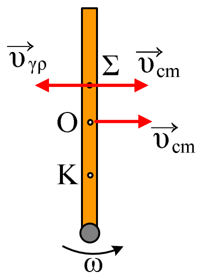
$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = (M+m)\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{m\upsilon}{M+m} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2} \quad (1)$$

ii) Η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon\frac{l}{4} = (\frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{16} + M\frac{l^2}{16})\omega \Rightarrow$$

$$m\upsilon\frac{l}{4} = \frac{5Ml^2}{24}\omega \Rightarrow \omega = \frac{6\upsilon}{5l} \qquad (2)$$

iii) Για να παραμείνει ακίνητο κάποιο σημείο της ράβδου, πρέπει η μεταφορική και η γραμμική ταχύτητα να είναι αντίθετες. Άρα το σημείο θα βρίσκεται σε σχέση με το κέντρο μάζας προς την αντίθετη πλευρά από αυτή που βρίσκεται η πλαστελίνη και σε απόσταση r από το κέντρο μάζας:



$$\upsilon_{cm} = \omega r \Rightarrow \frac{\upsilon}{2} = \frac{6\upsilon}{5l}r \Rightarrow r = \frac{5l}{12}$$

Άρα το σημείο βρίσκεται σε απόσταση d από το άκρο που κόλλησε η πλαστελίνη:

$$d = r + \frac{l}{4} = \frac{5l}{12} + \frac{l}{4} \Rightarrow d = \frac{2l}{3} \qquad (3)$$

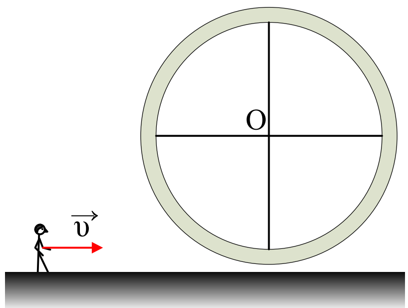
iv) Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση υπολογίζεται:

$$Q_\Theta = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετα)} = \frac{1}{2}M\upsilon^2 - (\frac{1}{2}2M\upsilon_{cm}{}^2 - \frac{1}{2}\frac{5Ml^2}{24}\omega^2) \Rightarrow$$

$$Q_\Theta = \frac{1}{2}M\upsilon^2 - \frac{1}{2}2M\frac{\upsilon^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{5Ml^2}{24}\frac{36\upsilon^2}{25l^2} \Rightarrow Q_\Theta = \frac{M\upsilon^2}{10} \qquad (4)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Άνθρωπος μάζας m τρέχοντας σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ πηδά στο εσωτερικό ακίνητου κατακόρυφου τροχού ακτίνας R. Ο τροχός έχει ροπή αδράνειας I, ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του. Να βρεθεί ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα του ανθρώπου ώστε αυτός αγκαλιάζοντας τον τροχό να φθάσει στο ψηλότερο σημείο. Οι τριβές στον άξονα περιστροφής θεωρούνται αμελητέες. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, καθώς και ότι οι διαστάσεις του ανθρώπου είναι πολύ μικρές σε σχέση με την ακτίνα του τροχού οπότε μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο.



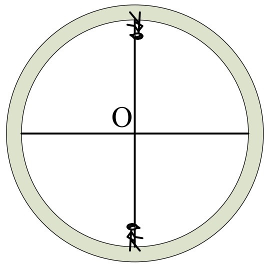
ΛΥΣΗ

Ο άνθρωπος πηδά στο κατώτερο σημείο του εσωτερικού του τροχού, δηλαδή έχουμε μια μορφή **πλαστικής κρούσης**. Προφανώς στον άξονα του τροχού τη στιγμή της κρούσης αναπτύσσονται δυνάμεις οι οποίες όμως **δε δημιουργούν ροπή** ως προς τον άξονα αυτό.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τροχός-άνθρωπος με βάση την **Αρχή Διατήρησης** της **Στροφορμής** ως προς τον άξονα του τροχού:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon R = (I + mR^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon R}{I + mR^2} \quad (1)$$

Μετά την κρούση και εφόσον **δεν** υπάρχουν τριβές **διατηρείται** η **Μηχανική ενέργεια** του συστήματος τροχός-άνθρωπος. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ελάχιστη ταχύτητα υ προκαλεί την ελάχιστη ω, η οποία θα έχει ως συνέπεια ο άνθρωπος **να φθάσει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς με μηδενική ταχύτητα.** Έτσι η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος τροχός-άνθρωπος θα έχει μετατραπεί σε δυναμική βαρυτική ενέργεια του ανθρώπου:



$$E_{ολ(αρχ)} = E_{ολ(τελ)} \Rightarrow \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2_{\min} = mg2R \Rightarrow \frac{1}{2}(I + mR^2)\frac{m^2\upsilon^2_{\min}R^2}{(I + mR^2)^2} = mg2R \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{4g}{mR}(I + mR^2)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M βρίσκεται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Μικρό σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα Uo, η διεύθυνση της οποίας είναι **κάθετη** στη ράβδο, χτυπά **ελαστικά** στο άκρο της.

i) Ποια φυσικά μεγέθη διατηρούνται κατά την κρούση;

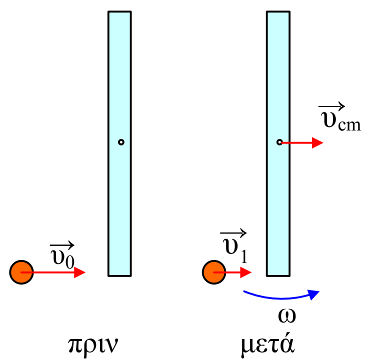
ii) Να υπολογισθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της και η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης.

iii) Να βρεθεί η σχέση μαζών m, M ώστε το σώμα μάζας m να συνεχίσει να κινείται μετά την κρούση κατά τη φορά της κίνησής του πριν την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ

i) Εφόσον το σύστημα είναι **μονωμένο** και η **διάρκεια** της κρούσης **αμελητέα**, **διατηρούνται** η **ορμή** και η **στροφορμή** του συστήματος. Επιπλέον αφού η κρούση είναι **ελαστική** διατηρείται και η **κινητική** ενέργεια του συστήματος.



ii) Η ράβδος μετά την κρούση θα αποκτήσει ταχύτητα **μεταφορικής** κίνησης υ_{cm} ενώ ταυτόχρονα θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω λόγω **περιστροφικής** κίνησης γύρω από **άξονα που διέρχεται από το μέσο της** και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και η ταχύτητα του σώματος m.

Λόγω διατήρησης της ορμής ισχύει:

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + M\upsilon_{cm} \quad (1)$$

όπου υ_1 η ταχύτητα του σώματος m μετά την κρούση.

Λόγω διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής ισχύει:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon_0 \frac{l}{2} = m\upsilon_1 \frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega \quad (2)$$

Λόγω διατήρησης της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετα)} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}Ml^2\omega^2 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε:

$$(1) \Rightarrow m(\upsilon_0 - \upsilon_1) = M\upsilon_{cm}$$

$$(2) \Rightarrow m(\upsilon_0 - \upsilon_1) = \frac{1}{6}Ml\omega$$

$$Άρα: M\upsilon_{cm} = \frac{1}{6}Ml\omega \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\omega l}{6} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) την (4) έχουμε:

$$m\upsilon_0^2 - m\upsilon_1^2 = \frac{M\omega^2 l^2}{9} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) την (4) έχουμε:

$$m\upsilon_1 = m\upsilon_0 - M\frac{\omega l}{6} \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0 - \frac{M\omega l}{6m} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) την (6) και λύνοντας ως προς ω μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$\omega = \frac{12m\upsilon_0}{l(M+4m)} \quad (7)$$

Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται αν στην (4) αντικαταστήσουμε την (7):

$$\upsilon_{cm} = \frac{2m\upsilon_0}{M+4m} \quad (8)$$

iii) Η ταχύτητα του σώματος m μετά την κρούση υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε στην (6) την (7):

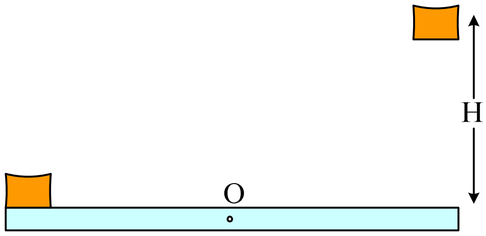
$$\upsilon_1 = \upsilon_0 \frac{4m - M}{4m + M} \quad (9)$$

Προφανώς το σώμα μάζας m θα συνεχίσει να κινείται μετά την κρούση κατά τη φορά της κίνησής του πριν την κρούση αν:

$$\upsilon_1 > 0 \Rightarrow 4m > M \Rightarrow m > \frac{M}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Ομογενής ράβδος μάζας M στηρίζεται στο μέσο της. Στο ένα της άκρο υπάρχει σάκος (1) με άμμο μάζας m. Η ράβδος συγκρατείται οριζόντια. Από ύψος H πέφτει στο άλλο άκρο της ένας δεύτερος σάκος (2) με άμμο ίσης μάζας m, οπότε η ράβδος ανατρέπεται γύρω από το σημείο στήριξης. Σε ποιο ύψος θα αναπηδήσει ο σάκος (1);



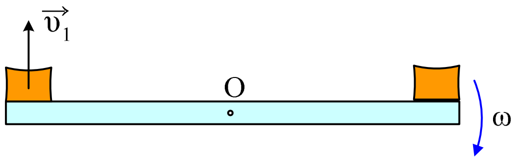
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

ΛΥΣΗ

Η ταχύτητα του σάκου (2) οριακά πριν την κρούση υπολογίζεται με χρήση του ΘΜΚΕ κατά τη διάρκεια της πτώσης:

$$\Delta K = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = mgH \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Το σύστημα ράβδος-σάκοι **αμέσως μετά** την κρούση εκτελεί **περιστροφική** κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά αμέσως μετά την κρούση, υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** γύρω από τον άξονα περιστροφής, αφού το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δημιουργούν τα βάρη από τα σακιά είναι μηδέν:



$$L_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = L_{\text{ολ}(\mu\varepsilon\tau\alpha)} \Rightarrow m\upsilon\frac{l}{2} = (\frac{1}{12}Ml^2 + 2m\frac{l^2}{4})\omega$$

$$\Rightarrow m\upsilon\frac{l}{2} = \frac{M+6m}{12}l^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{6m\sqrt{2gH}}{(M+6m)l} \quad (2)$$

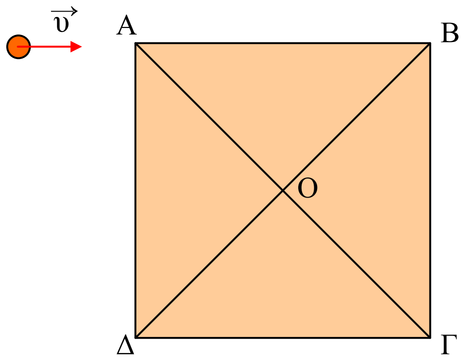
Την ίδια στιγμή ο σάκος (1) έχει κατακόρυφη προς τα πάνω ταχύτητα ίση με τη γραμμική ταχύτητα του άκρου της ράβδου:

$$\upsilon_1 = \omega\frac{l}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{3m\sqrt{2gH}}{M+6m} \quad (3)$$

Το ύψος στο οποίο θα ανέβει υπολογίζεται με χρήση ΘΜΚΕ κατά τη διάρκεια της ανόδου:

$$\Delta K = W_B \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = H(\frac{3m}{M+6m})^2$$

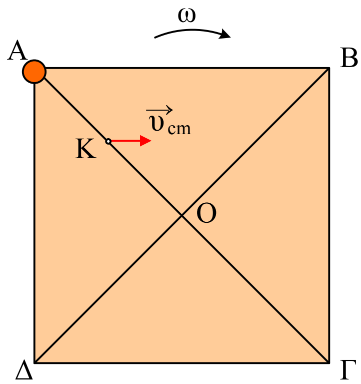
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7



Λεπτή τετράγωνη ΑΒΓΔ πλάκα μάζας m βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο Α χτυπάει σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m, με ταχύτητα υ **κάθετη** στην πλευρά ΑΔ και κολλάει σ' αυτό. Υπολογίστε: α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος πλάκα-σώμα μετά την κρούση β) τη θερμότητα που ελευθερώνεται κατά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας τετράγωνου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτό που διέρχεται από το κέντρο του: $I = \frac{1}{6}ma^2$ όπου α η πλευρά του τετράγωνου. Το **κέντρο μάζας του συστήματος πλάκα-σώμα** βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο ΑΓ και σε απόσταση $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ από το άκρο Α.

ΛΥΣΗ



Επειδή ο φορέας της ταχύτητας υ του μικρού σώματος δε διέρχεται από το κέντρο της πλάκας, το σύστημα πλάκα-σώμα μετά την κρούση θα εκτελέσει **μεταφορική** και **περιστροφική** κίνηση γύρω από άξονα κάθετο στην πλάκα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος. Η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Ορμής**:

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon = 2m\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2} \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται με χρήση της **Αρχής Διατήρησης** της **Στροφορμής** γύρω από τον άξονα περιστροφής. Η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το κέντρο μάζας είναι:

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{4}\eta\mu 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = \frac{a}{4}$$

Οπότε:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετα)} \Rightarrow m\upsilon\frac{a}{4} = \left[(\frac{1}{6}ma^2 + m\frac{a^2}{8}) + m\frac{a^2}{8}\right]\omega \Rightarrow$$

$$m\upsilon\frac{a}{4} = \frac{5}{12}ma^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3\upsilon}{5a} \quad (2)$$

Η θερμότητα που ελευθερώνεται είναι ίση με την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

$$Q_\theta = \left|\Delta K\right| = K_{(\pi\rho\iota\nu)} - K_{(\mu\varepsilon\tau\alpha)} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - (\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_{cm}{}^2) \Rightarrow$$

$$Q_\theta = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - (\frac{1}{2}\frac{5}{12}ma^2\frac{9\upsilon^2}{25a^2} + m\frac{\upsilon^2}{4}) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{13}{40}m\upsilon^2 \Rightarrow Q_\theta = \frac{7}{40}m\upsilon^2$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια
Θοδωρής Παπασγουρίδης