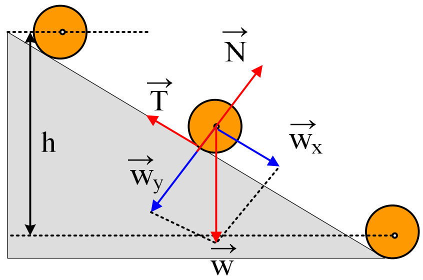
Έργο στατικής τριβής

Σε ένα πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης φ αφήνεται από ύψος h, ένα στερεό σώμα με κατανομή μάζας συμμετρική ως προς το κέντρο του. (Το στερεό μπορεί να είναι συμπαγής σφαίρα, συμπαγής κύλινδρος, κοίλη σφαίρα, κούφιος κύλινδρος, δίσκος, δακτύλιος). Το στερεό **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει** και φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μεταφορικής (υ) και περιστροφικής (ω) κίνησης τη στιγμή που φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (για το δίσκο και το δακτύλιο είναι και κάθετος στο επίπεδό τους, ενώ για τους κυλίνδρους συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας τους) δίνεται από τη σχέση: $I = \lambda M R^2$, όπου λ θετική αδιάστατη σταθερά.

Απάντηση:

Μια συνηθισμένη λύση είναι αυτή που βασίζεται στην **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας**. Εφόσον το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η τριβή που αναπτύσσεται είναι **στατική** και **δεν παράγει έργο** αφού εφαρμόζεται στο σημείο επαφής σώματος-δαπέδου το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα. Έτσι η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η **συντηρητική** δύναμη του βάρους, οπότε η αρχική δυναμική ενέργεια λόγω θέσης στο βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ίση με την τελική κινητική ενέργεια της σύνθετης κίνησης του στερεού:



$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M R^2\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2(1+\lambda) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Εφόσον το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει:

$$\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

Στην πιο πάνω κομψή και λυτή λύση νομίζω ότι γεννάται το εξής ερώτημα: **αφού η στατική τριβή δεν παράγει έργο**, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος και συγκεκριμένα η Wx συνιστώσα, οπότε η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας θα έπρεπε να μετατρέπεται αποκλειστικά σε κινητική μεταφορικής κίνησης (αφού η Wx δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο ή συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας), τότε **η κινητική λόγω περιστροφικής κίνησης από το έργο ποιας δύναμης προέρχεται;**

Η απάντηση νομίζω ότι προκύπτει, αν βασιζόμενοι στην αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για κάθε κίνηση χωριστά.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_x} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 - 0 = Mg\eta\mu\varphi x - Tx \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 = Mgh - Tx \quad (1)$$

αφού εξετάζοντας μόνο τη μεταφορική κίνηση το σημείο εφαρμογής της στατικής τριβής μετατοπίζεται κατά: $x = \dfrac{h}{\eta\mu\varphi}$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_T} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = \tau_T\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda MR^2\omega^2 = TR\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 = Tx \quad (2)$$

αφού εξετάζοντας μόνο την περιστροφική κίνηση η ροπή της στατικής τριβής στρέφει το στερεό κατά γωνία: $\theta = \dfrac{x}{R}$ όπου x η μετατόπιση του κέντρου μάζας, η οποία συμπίπτει με το τόξο περιστροφής ενός σημείου της περιφέρειας.

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1)+(2) έχουμε:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda M\upsilon^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2(1+\lambda) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}}$$

δηλαδή φθάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα όπως και με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μόνο που τώρα είναι κατανοητό από τα έργα ποιων δυνάμεων προκύπτουν οι διάφορες μορφές ενέργειας.

Σχόλιο:

Νομίζω ότι η φράση: « **η στατική τριβή κατά τη διάρκεια της κύλισης χωρίς ολίσθηση δεν παράγει έργο,** διότι το σημείο επαφής σώματος δαπέδου έχει μηδενική ταχύτητα οπότε δε μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της» **παραπλανά**. Η στατική τριβή επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση και επιταχύνει την περιστροφική. **Ενεργειακά η απώλεια κινητικής μεταφορικής λόγω του έργου της στατικής τριβής, μετατρέπεται σε κινητική περιστροφής μέσω του έργου της ροπής της τριβής**. Άρα η φράση **η στατική τριβή δεν παράγει έργο**, **δεν λέει όλη την αλήθεια**. Επειδή τα έργα της στατικής τριβής στη μεταφορική και στην περιστροφική κίνηση είναι ίσα κατά απόλυτη τιμή, **δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας,** παρά μόνο μετατροπή κινητικής μεταφορικής σε κινητική περιστροφικής κίνησης. Αν θέλουμε να είμαστε πιο **ακριβείς στη διατύπωση** είναι καλύτερα να λέμε: **κατά τη διάρκεια της κύλισης χωρίς ολίσθηση η στατική τριβή δεν προκαλεί απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας**, οπότε διατηρείται η μηχανική ενέργεια του στερεού. Μια αντίστοιχη φραστική ασάφεια υπάρχει στη διατύπωση: «στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις» για την περίπτωση όπου: ΣF=0.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης