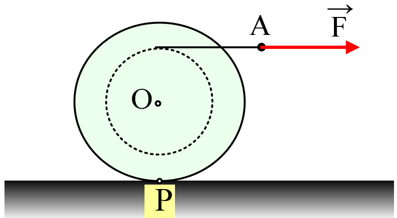
Έργο και Κινητική ενέργεια στη σύνθετη κίνηση στερεού.

Ένας κύλινδρος ακτίνας R=1m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ο κύλινδρος έχει μια λεπτή εγκοπή βάθους 0,25m μέσα στην οποία έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Ασκούμε στο άκρο Α του νήματος μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=8,5N μέχρι το άκρο Α να μετατοπιστεί κατά x_A=4m, όπως φαίνεται στο σχήμα:



i) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στο στερεό μέσω του έργου της δύναμης;

ii) Η επιτάχυνση ενός σημείου P (επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο) είναι:

$$α)\ \frac{8}{17}\,α_A, \qquad β)\ -\frac{8}{17}\,α_A \qquad γ)\ -\frac{4}{17}\,α_A$$

όπου $α_A$ η επιτάχυνση του άκρου Α του νήματος.

iii) Η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι ίση με:

α) 16J, β) 25J, γ) 34J

iv) Το έργο της ασκούμενης ροπής θα είναι ίσο με:

α) 9J, β) 18J, γ) 22J.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεών του $I= ½ MR^2$.

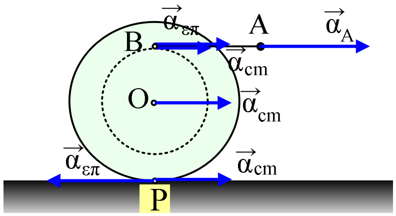
Απάντηση:

i) Η δύναμη F ασκείται στο υλικό σημείο που βρίσκεται στο άκρο Α και το έργο της είναι:

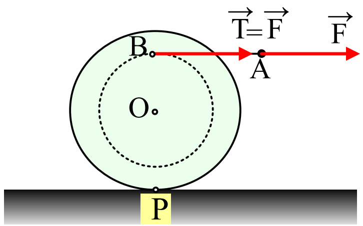
$$W_F=F\cdot x_A= 34J.$$

Το έργο αυτό εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από αυτόν που ασκεί τη δύναμη, μέσω του νήματος, στον κύλινδρο, συνεπώς ο κύλινδρος αποκτά κινητική ενέργεια $K_{ολ}$=75J.

ii) Η επιτάχυνση του άκρου Α είναι και επιτάχυνση κάθε σημείου του νήματος, συνεπώς και του σημείου Β, το οποίο είναι και σημείο του κυλίνδρου. Όμως ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, οπότε το σημείο Β έχει μια επιτάχυνση εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης ίση με $α_{cm}$ και μια, εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του γύρω από το κέντρο Ο, την $α_{επ}$, που οφείλεται στην επιταχυνόμενη στροφική κίνηση του κυλίνδρου (στην οριζόντια διεύθυνση, αφού υπάρχει και η κεντρομόλος επιτάχυνση, που αυτή τη στιγμή δεν μας απασχολεί).



Όμως για την κυκλική κίνηση του σημείου Β έχουμε υ=ω·r ή $\frac{dυ}{dt}=\frac{dω}{dt}\cdot r$ ή $α_{επ}=α_{γων}\cdot r$, οπότε θα έχουμε και $α_{cm}+α_{γων}\cdot r=α_A$ (1), όπου r=0,75m.



Παίρνουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου, πάνω στον οποίο ασκείται στο σημείο Β, η τάση του νήματος, η οποία είναι ίση με την ασκούμενη δύναμη F και έχουμε:

$$F = M\cdot\alpha_{cm} \quad (2) \quad \text{και}$$

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ F\cdot r = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Με διαίρεση των (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{F}{Fr} = \frac{Ma_{cm}}{\frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu}} \quad \text{ή}$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2r}{R^2}a_{cm} = 1{,}5a_{cm} \quad (\text{S.I.})$$

οπότε η σχέση (1) μας δίνει $\alpha_{cm} + 1{,}5\cdot\alpha_{cm}\cdot 0{,}75 = \alpha_A$ ή $\alpha_{cm} = \frac{8}{17}\alpha_A$ και $\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{9}{17}\alpha_A$. ή

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r = \frac{9}{17}\alpha_A.$$

Ερχόμενοι τώρα στο σημείο Ρ η συνολική του επιτάχυνση είναι (βλέπε σχήμα):

$$\alpha_P = \alpha_{cm} - \alpha_{\varepsilon\pi P} = \frac{8}{17}\alpha_A - \frac{9}{17}\cdot\frac{R}{r}a_A = -\frac{4}{17}a_A$$

Σωστή πρόταση είναι η γ)

Αξίζει στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι τόσο η α_{cm}, όσο και η $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ συνεπώς και η $\alpha_{\varepsilon\pi}$ έχουν σταθερό μέτρο, συνεπώς από την (1) και το άκρο του νήματος Α έχει σταθερή επιτάχυνση.

iii) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε, για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$K_{\mu\varepsilon\tau\text{-}\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \ \text{ή}\ K_{\mu\varepsilon\tau\text{-}\tau\varepsilon\lambda} = W_F = F\cdot x_{cm}$$

$$\text{Αλλά } x_{cm} = ½\,\alpha_{cm}\cdot t^2 = ½\cdot\frac{8}{17}\alpha_A\cdot t^2 = \frac{8}{17}x_A,$$

$$\text{Οπότε } K_{\mu\varepsilon\tau} = F\cdot x_{cm} = \frac{8}{17}F\cdot x_A = 16J.$$ Σωστή η α) πρόταση.

iv) Το έργο της ασκούμενης ροπής θα είναι ίσο με:

$$W_\tau = \tau\cdot\theta = F\cdot r\cdot ½\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 = F\cdot\frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi B}t^2 = F\cdot\frac{1}{2}\frac{9}{17}a_A t^2 = \frac{9}{17}Fx_A = 18J$$

Πράγμα αναμενόμενο αφού η ενέργεια που δόθηκε στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης είναι 34J και τα 16J είναι η μεταφορική κινητική ενέργεια, από τη διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι τα υπόλοιπα 18J θα βρίσκονται με τη μορφή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας. Σωστή η β) πρόταση.

Σχόλια:

1) Η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι ίση με $K_\mu = ½\, M\upsilon_{cm}^2$. Αλλά:

$$\upsilon_{cm}= \alpha_{cm}\cdot t \quad \text{και } x_{cm}= ½\, \alpha_{cm}\cdot t^2.$$

Με απαλοιφή του χρόνου παίρνουμε $\upsilon_{cm}^2 = 2a_{cm}x_{cm}$ συνεπώς:

$$K_\mu= ½\, M\cdot 2\alpha_{cm}x_{cm}= F\cdot x_{cm}=W_F$$

όπου W_F το έργο της δύναμης, αν αυτή ασκείτο στο κέντρο μάζας και το στερεό εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση.

2) Για την περιστροφική κινητική ενέργεια έχουμε:

$$K_\pi= ½\, I\omega^2$$

$$\text{Αλλά } \omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \quad \text{και } \theta = ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2$$

Με απαλοιφή του χρόνου παίρνουμε $\omega^2=2\theta\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$, συνεπώς:

$$K_\pi= ½\, I\cdot 2\theta\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}= \tau_F\cdot\theta =W_\tau$$

Δηλαδή η περιστροφική κινητική ενέργεια είναι ίση με το έργο της ασκούμενης ροπής.

Συμπέρασμα:

Στο στερεό ασκείται **μια μόνο δύναμη** μέσω του νήματος, με μέτρο ίσο με F. Αυτή παράγει έργο $W=F\cdot x_A$, το οποίο μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στον κύλινδρο και είναι ίσο και με την κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει (αρχικά αφού ήταν ακίνητος δεν είχε κινητική ενέργεια).

Το παραπάνω έργο όμως, θα μπορούσε να υπολογιστεί αποδίδοντας «δύο ρόλους» στη δύναμη αυτή. Από τη μια μεριά λειτουργεί σαν δύναμη που μετακινεί το στερεό (μετατοπίζει το κέντρο μάζας), οπότε το έργο της $F\cdot x_{cm}$ μετράει την ενέργεια που θα αποθηκευτεί στον κύλινδρο με τη μορφή της μεταφορικής κινητικής ενέργειας.

Από την άλλη μπορούμε να την δούμε σαν ροπή, αλλά τότε το έργο της θα εκφράζει την ενέργεια που θα αποκτήσει ο κύλινδρος, λόγω περιστροφής.

Προφανώς το άθροισμα αυτών των δύο έργων είναι ίσο με το $W=F\cdot x_A$, το οποίο είναι ίσο με την ολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης