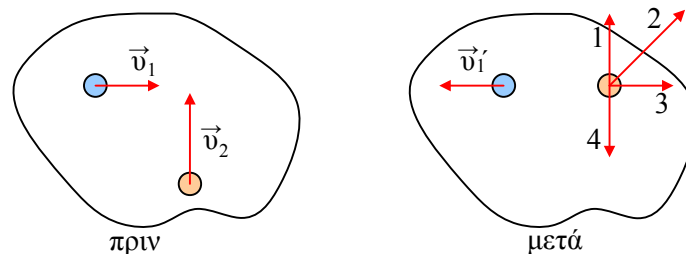


### 4.1 Ερωτήσεις με δικαιολόγηση στις κρούσεις

#### 1) Αρχή διατήρησης της ορμής σε κρούση.

Στο σχήμα δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις και συγκρούονται, οπότε η πράσινη σφαίρα μετά την κρούση έχει ταχύτητα  $v_1'$ , με αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική  $v_1$ .



Ποιο από τα διανύσματα 1,2,3 και 4 παριστά την ταχύτητα της κόκκινης σφαίρας μετά την κρούση;

**Απάντηση:**

Η ορμή είναι διάνυσμα και για διατηρείται σε μια κρούση θα πρέπει να διατηρείται τόσο στον άξονα x, όσο και στον y. Έτσι το σωστό διάγραμμα για την ορμή της κόκκινης σφαίρας είναι το 2, γιατί μόνο τότε θα δώσει μια συνιστώσα στον x προς τα δεξιά (που είχαμε αρχικά ορμή, λόγω της πράσινης σφαίρας) και στον y προς τα πάνω.

Με μαθηματικά:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{αρχ}} &= \mathbf{P}_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \\ P_{x\text{αρχ}} &= P_{x\text{τελ}} \quad \text{και} \quad P_{y\text{αρχ}} = P_{y\text{τελ}} \quad \text{ή} \\ m_1 v_1 &= -m_1 v_1' + m_2 v_{2x} \\ \text{και} \quad m_2 v_2 &= m_2 v_{2y}. \end{aligned}$$

#### 2) Ελαστική κρούση και ορμές.

Μια μικρή σφαίρα A κινείται έχοντας ορμή  $p_1$  και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B. Μετά την κρούση η B σφαίρα έχει ορμή  $1,5 p_1$ .



i) Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών  $m_1/m_2$  είναι ίσος με:

- α)  $1/3$     β)  $1/2$     γ)  $1$     δ)  $3/2$

ii) Η μεταβολή της ορμής της A σφαίρας είναι ίση με:

- α)  $-p_1$     β)  $-1,5 p_1$     γ)  $0$     δ)  $1,5 p_1$ .

iii) Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνονται οι δυο σφαίρες μετά την κρούση είναι ίση με:

- α)  $1/3 v_1$     β)  $1/2 v_1$     γ)  $v_1$     δ)  $1,5 v_1$

όπου  $v_1$  η αρχική ταχύτητα της A σφαίρας.

**Απάντηση:**

i) Η ορμή της B σφαίρας μετά την κρούση είναι ίση με  $p_2 = m_2 v_2'$ , ενώ για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών

ισχύουν:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\alpha) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (\beta)$$

Οπότε έχουμε:

$$P_2 = m_2 v_2' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2P_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \rightarrow \frac{3P_1}{2} = \frac{2P_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Σωστή πρόταση η α)

ii) Από την Α.Δ.Ο. παίρνουμε:

$$p_1 + 0 = p_1' + p_2' \rightarrow \Delta p_1 = p_1' - p_1 = -p_2' = -1,5p_1$$

Σωστή η β)

iii) Η σφαίρα Α μετά την κρούση έχει ταχύτητα  $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 = -\frac{1}{2} v_1$

Μπορούμε επίσης από την αντίστοιχη εξίσωση (β) να βρούμε και την ταχύτητα της Β σφαίρας. Αλλά ας δοκιμάσουμε άλλο δρόμο:  $p_2' = 1,5p_1 \rightarrow m_2 v_2' = 1,5m_1 v_1 \rightarrow 3m_1 v_2' = 1,5m_1 v_1 \rightarrow$

$$v_2' = \frac{1}{2} v_1$$

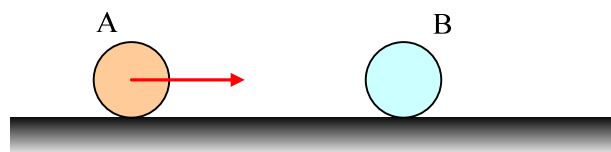
Συνεπώς η ταχύτητα με την οποία η Β σφαίρα απομακρύνεται από την Α (λέγεται και σχετική ταχύτητα) είναι:

$$u = v_2' - v_1' = v_1$$

ίση δηλαδή με την ταχύτητα που αρχικά η Α σφαίρα πλησίαζε την Β. Σωστή η γ) πρόταση

### 3) Ελαστική κρούση και ενέργειες.

Μια μικρή σφαίρα Α μάζας  $m_1$  και κινητικής ενέργειας  $K$ , η οποία κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β.



i) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α είναι:

$$\alpha) -\frac{2m_1 m_2 K}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \beta) -\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \gamma) -\frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} 100\%$$

ii) Αν το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας είναι 64%, τότε για τις μάζες των δύο σφαιρών ισχύει:

$$\alpha) m_1 = 4m_2 \quad \beta) m_1 = 2m_2 \quad \gamma) m_2 = 2m_1 \quad \delta) m_2 = 4m_1$$

Ποιες από τις παραπάνω σχέσεις μπορούν να ισχύουν;

#### Απάντηση:

i) Το ποσοστό μεταβολής της Α σφαίρας είναι ίσο:

$$\frac{\Delta K}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = \frac{v_1'^2 - v_1^2}{v_1^2} 100\% \rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{K_1} 100\% = \left( \frac{v_1'^2}{v_1^2} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (1)$$

Αλλά  $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ , οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{\Delta K}{K_1} 100\% = \left( \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} - 1 \right) \cdot 100\% = -\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$$

ii) Για ποσοστό απώλειας 64% η παραπάνω σχέση δίνει (απώλεια ενέργειας = - μεταβολή ενέργειας):

$$64 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100 \rightarrow$$

$$4m_2^2 - 17m_1 m_2 + 4m_1^2 = 0 \rightarrow$$

$$m_2 = \frac{17m_1 \pm \sqrt{(17m_1)^2 - 32m_1^2}}{8} \rightarrow$$

$$m_2 = 4m_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = \frac{1}{4} m_1$$

Συνεπώς οι σχέσεις α) και δ) μπορούν να εκφράζουν την επικρατούσα κατάσταση.

#### 4) Ελαστική κρούση και λόγος μαζών

Μια μικρή σφαίρα μάζας  $m_2$  συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα μάζας  $m_1$ . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες ταχύτητες ίσων μέτρων. Ο λόγος των μαζών  $\frac{m_1}{m_2}$  των δύο

σφαιρών είναι :

$$\alpha. 1 \qquad \beta. 3 \qquad \gamma. 2$$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**Απάντηση.**

Επειδή η κρούση είναι μετωπική ελαστική με τη σφαίρα  $m_1$  ακίνητη πριν τη κρούση θα ισχύει :

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

(προσοχή στις σχέσεις, πως αλλάζουν ανάλογα με ποια μάζα κινείται πριν την κρούση).

Πρέπει  $v_2' = -v_1'$  άρα :

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow m_2 - m_1 = -2m_2 \Rightarrow 3m_2 = m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$

Σωστή η β.

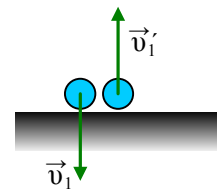
5) **Κρούση σφαίρας με το έδαφος**

Αφήνουμε από ορισμένο ύψος  $h$  μια μπάλα να πέσει και αφού κτυπήσει στο έδαφος, επιστρέφει στην αρχική της θέση. Αντίσταση από τον αέρα δεν υπάρχει.

- i) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.
  - α) Το ολικό έργο του βάρους είναι μηδέν, επειδή ήταν κάθετο στην μετατόπιση.
  - β) Κατά την κρούση της μπάλας με το έδαφος, διατηρείται η κινητική της ενέργεια.
  - γ) Η κρούση με το έδαφος ήταν ελαστική.
  - δ) Η ορμή της μπάλας, κατά την κρούση της με το έδαφος, διατηρείται.
- ii) Σε μια στιγμή, κατά την κρούση, η ταχύτητα της μπάλας γίνεται (στιγμιαία) μηδέν. Τι έχει γίνει την στιγμή αυτή η αρχική δυναμική ενέργεια της σφαίρας;
- iii) Η δύναμη που δέχεται η μπάλα από το έδαφος είναι διατηρητική (Συντηρητική); Εξηγήστε την άποψή σας.

**Απάντηση:**

- i) Αφού το σώμα επέστρεψε στην αρχική του θέση σημαίνει ότι δεν έχασε ενέργεια κατά την κρούση, η οποία ήταν ελαστική. Έτσι η μπάλα έφτασε με ορισμένη ταχύτητα  $v_1$  στο έδαφος και ανακλάστηκε με ταχύτητα  $v_1' = -v_1$ , όπως στο σχήμα.

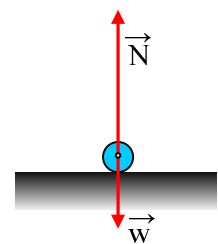


Το έργο του βάρους είναι μηδέν, επειδή έχουμε κλειστή διαδρομή και όχι επειδή ήταν κάθετο στη μετατόπιση, ενώ η ορμή, σαν διάνυσμα που είναι μετεβλήθη κατά την κρούση.

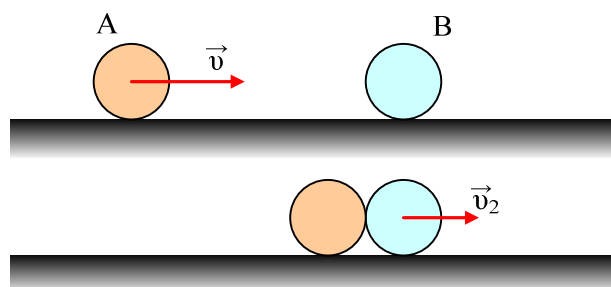
Οπότε οι απαντήσεις είναι:

Λ      Σ      Σ      Λ

- ii) Τη στιγμή που μηδενίστηκε η ορμή της μπάλας, η κινητική ενέργειά της είναι μηδενική και όλη η ενέργεια εμφανίζεται σαν δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης.
- iii) Η δύναμη που δέχτηκε η σφαίρα από το έδαφος είναι συντηρητική αφού το έργο της κατά μήκος κλειστής διαδρομής (συμπίεση – αποσυμπίεση) είναι μηδέν. Άλλωστε η Μηχανική ενέργεια διατηρείται κατά την διάρκεια της επαφής, άρα στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, το βάρος είναι συντηρητική, άρα και η  $N$  από το έδαφος είναι συντηρητική δύναμη.

6) **Και κατά τη διάρκεια της κρούσης;**

Μια σφαίρα A μάζας  $m$  κινούμενη με ταχύτητα  $v$ , συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B μάζας  $2m$ .



i) Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση, συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha) v_1' = v_2' \quad \beta) v_1' = 2 v_2' \quad \gamma) v_1' = \frac{1}{2} v_2'$$

ii) Σε μια στιγμή  $t_1$  στη διάρκεια της κρούσης η σφαίρα B έχει ταχύτητα  $v_2 = \frac{1}{2} v$ .

A) Η ταχύτητα της A σφαίρας τη στιγμή αυτή είναι:

$$\alpha) \text{μηδέν} \quad \beta) \frac{1}{3} v \quad \gamma) \frac{1}{2} v$$

B) Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή είναι:

$$\alpha) \text{μηδέν} \quad \beta) \frac{1}{4} m v^2 \quad \gamma) \frac{1}{2} m v^2.$$

### Απάντηση:

i) Βρίσκουμε τις ταχύτητες μετά την κρούση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m - 2m}{m + 2m} v = -\frac{1}{3} v$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v = \frac{2m}{m + 2m} v = \frac{2}{3} v$$

Συνεπώς για τα μέτρα τους ισχύει το  $\gamma) v_1' = \frac{1}{2} v_2'$

ii) Εφαρμόζουμε ΑΔΟ ανάμεσα σε μια στιγμή πριν την κρούση και τη στιγμή  $t_1$  και παίρνουμε:

$$\vec{P}_{ap} = \vec{P}_{t1} \rightarrow$$

$$mv = mv_1 + 2mv_2 \rightarrow$$

$$v_1 = v - 2v_2 = 0$$

A) Δηλαδή τη στιγμή αυτή η A σφαίρα έχει μηδενική ταχύτητα. Το  $\alpha)$ .

B) Αφού η κρούση είναι ελαστική, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη διάρκειά της ανάμεσα στα δυο σώματα είναι συντηρητικές, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Με εφαρμογή της ΑΔΜΕ για το σύστημα ανάμεσα σε μια στιγμή πριν την κρούση και τη στιγμή  $t_1$  παίρνουμε:

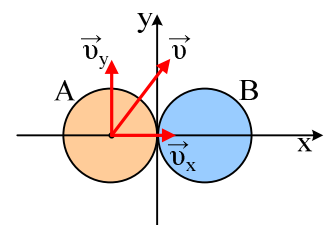
$$K_{ap\chi} + U_{ap\chi} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 2m \cdot \left(\frac{1}{2} v\right)^2 + U_{ελ} \rightarrow$$

$$U_{ελ} = \frac{1}{4} m v^2.$$

### 7) Μια πλάγια ελαστική κρούση.

Μια σφαίρα A κινείται με ταχύτητα  $v$  σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με ακίνητη σφαίρα B, ίσης μάζας όπως στο σχήμα. Στο σχήμα βλέπετε τις συνιστώσες της ταχύτητας,  $v_x$  στη διεύθυνση της διακέντρου των δύο σφαιρών και  $v_y$  σε κάθετη διεύθυνση.



Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παρακάτω προτάσεις.

- Μετά την κρούση η A σφαίρα στον άξονα x θα έχει ταχύτητα με φορά προς τα αριστερά και μέτρο ίσο με  $v_x$ .
- Μετά την κρούση η A σφαίρα στον άξονα y θα έχει ταχύτητα με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με  $v_y$ .
- Η σφαίρα B θα κινηθεί μετά την κρούση στη διεύθυνση x.

- iv) Οι δύο σφαίρες θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις.  
 v) Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας που οφείλεται στην κρούση είναι ίσο με  $100\sigma\eta^2\theta$ , όπου  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα με τη διάκεντρο των δύο σφαιρών.

**Απάντηση:**

Κρούση στην πραγματικότητα έχουμε εξαιτίας της ταχύτητα  $u_x$ . Άρα επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες, δηλαδή  $u_{Bx}=u_x$ , ενώ  $u_{x1}'=0$ . Έτσι μετά την κρούση η Α σφαίρα θα κινηθεί στον άξονα  $y$  με ταχύτητα  $u_y$ , ενώ η Β στον άξονα  $x$  με ταχύτητα  $u_{Bx}=u_x$ .

Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας θα είναι:

$$\Pi = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_y^2}{\frac{1}{2}m\upsilon^2} \cdot 100\%$$

$$\Pi = \left(1 - \frac{\upsilon_y^2}{\upsilon^2}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\upsilon^2 \eta \mu^2 \theta}{\upsilon^2}\right) \cdot 100\% = \sigma \upsilon \eta^2 \theta \cdot 100\%$$

Έτσι οι προτάσεις είναι:

Λ            Σ            Σ            Σ            Σ

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

*Διονύσης Μάργαρης*